

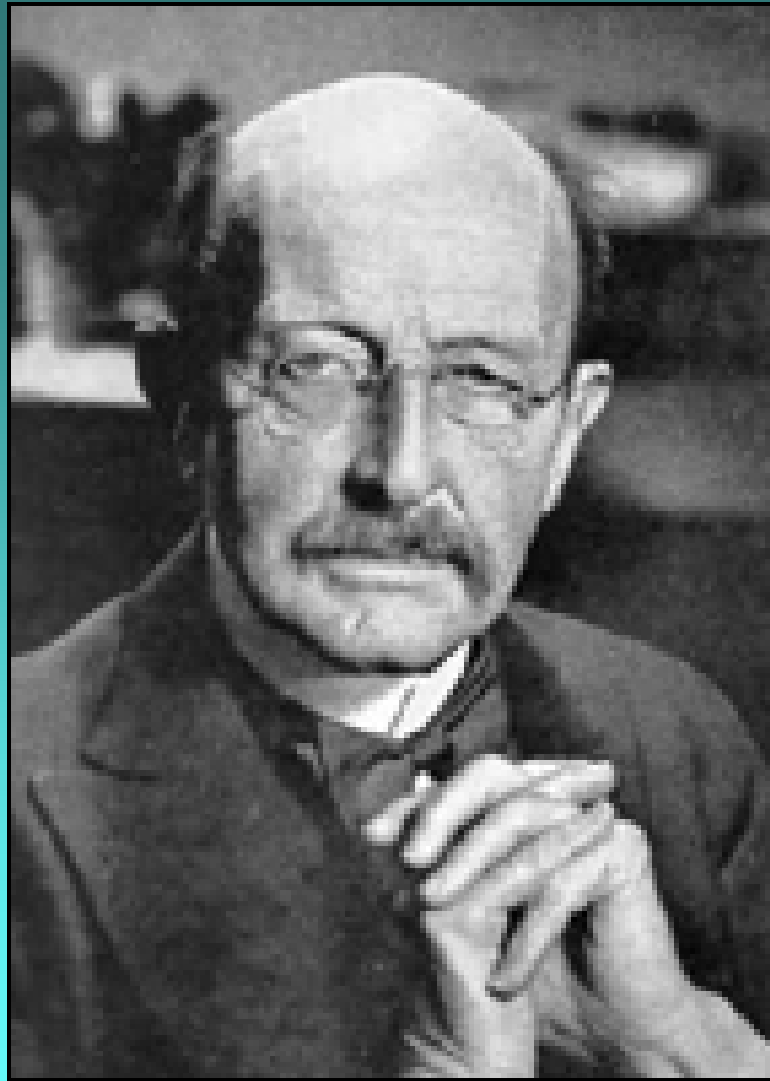


# **Black-body radiation and the forgotten heritage of Max Planck.**

**Sándor Varró<sup>1,2</sup>**

- 1) Wigner Research Centre for Physics, SZFI, Hung. Acad. Sci., Budapest**
- 2) ELI-ALPS (Attosecond Light Pulse Source), Research Institute, Szeged**

SZFI; Institute for Solid State Physics and Optics, Wigner RCP, 15. May 2018. 10:00h



**23 April 1858 ( Kiel ) - 4 October 1947 ( Göttingen )**

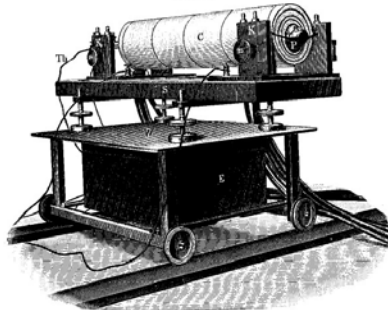
- **Planck's discovery of ' $h$ '. [The 'interpolation formula']**
- **Planck's second theory (1911). [Stimulated emission]**
- **Planck in Hungary (1936, 1939).**
- **Planck on the the energy fluctuations of the radiation.**
- **Planck's natural system of units (1899).**

# Planck's discovery of ' $h$ '

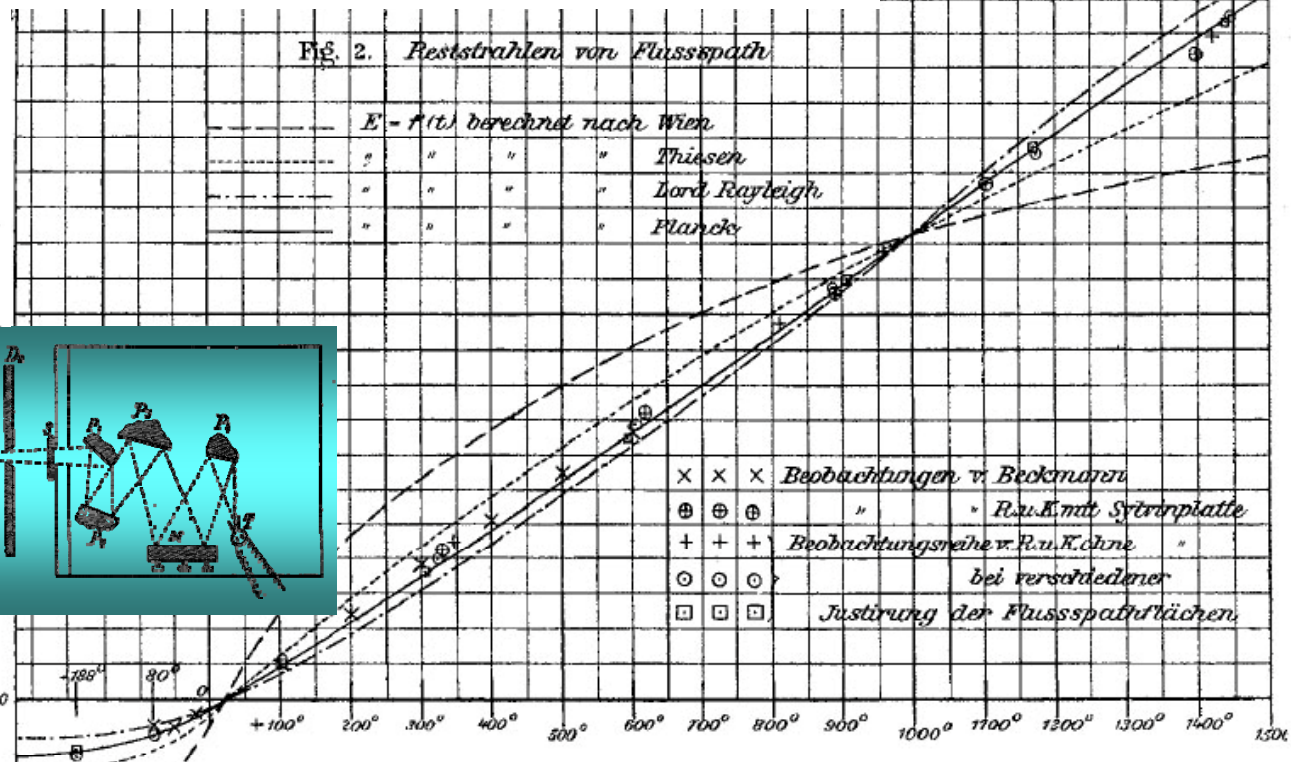
# Temperature dependence of the intensity of a spectral component [from -188 °C up to 1500 °C]. Rubens and Kurlbaum (1900).



Fig. 1055.



Schwarzer Körper nach Lummer-Kurlbaum.



$$E_{\lambda} / c_1 =$$

Wien (1896)

Thiesen (1900)

Rayleigh (1900)

Planck (1900)

$$\lambda^{-5} e^{-c_2 / \lambda T}$$

$$\lambda^{-5} \sqrt{\lambda T} e^{-c_2 / \lambda T}$$

$$\lambda^{-4} T e^{-c_2 / \lambda T}$$

$$\lambda^{-5} / (e^{+c_2 / \lambda T} - 1)$$

The method of 'Reststrahlen'. K. Beckman's Dissertation (1898). H. Rubens und F. Kurlbaum : Anwendung der Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes. *Ann. der Phys.* 2 , 649-666 (1901). O. Lummer und E. Pringsheim : Kritisches zur schwarzen Strahlung. *Ann. der Phys.* 6 , 192-210 (1901).

Note on the displacement law  $\lambda_m \times T = \text{const.}$  [ Kövesligethy R (1890) ]



welche  $J_{\lambda T}$  bei constantem  $T$  den Maximalwerth erreicht. Es folgt aus Weber's Formel:

$$(1a) \quad \frac{J_{\lambda T}}{J_{\lambda_m T}} = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2 e^{-\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2 + 1},$$

aus Michelson's Formel:

$$(2a) \quad \frac{J_{\lambda T}}{J_{\lambda_m T}} = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^6 e^{-3\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2 + 3},$$

aus Kövesligethy's Formel:

$$(3a) \quad \frac{J_{\lambda T}}{J_{\lambda_m T}} = \frac{4 \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2}{\left\{\left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 + 1\right\}^2}.$$

$$\lambda_m \cdot T = c,$$

$$\lambda_m^2 \cdot T = c,$$

$$\lambda_m \cdot T = c.$$

1) M. W. Michelson, Journ. de Phys. II. 6. p. 467. 1887.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 27. p. 460. 1889.

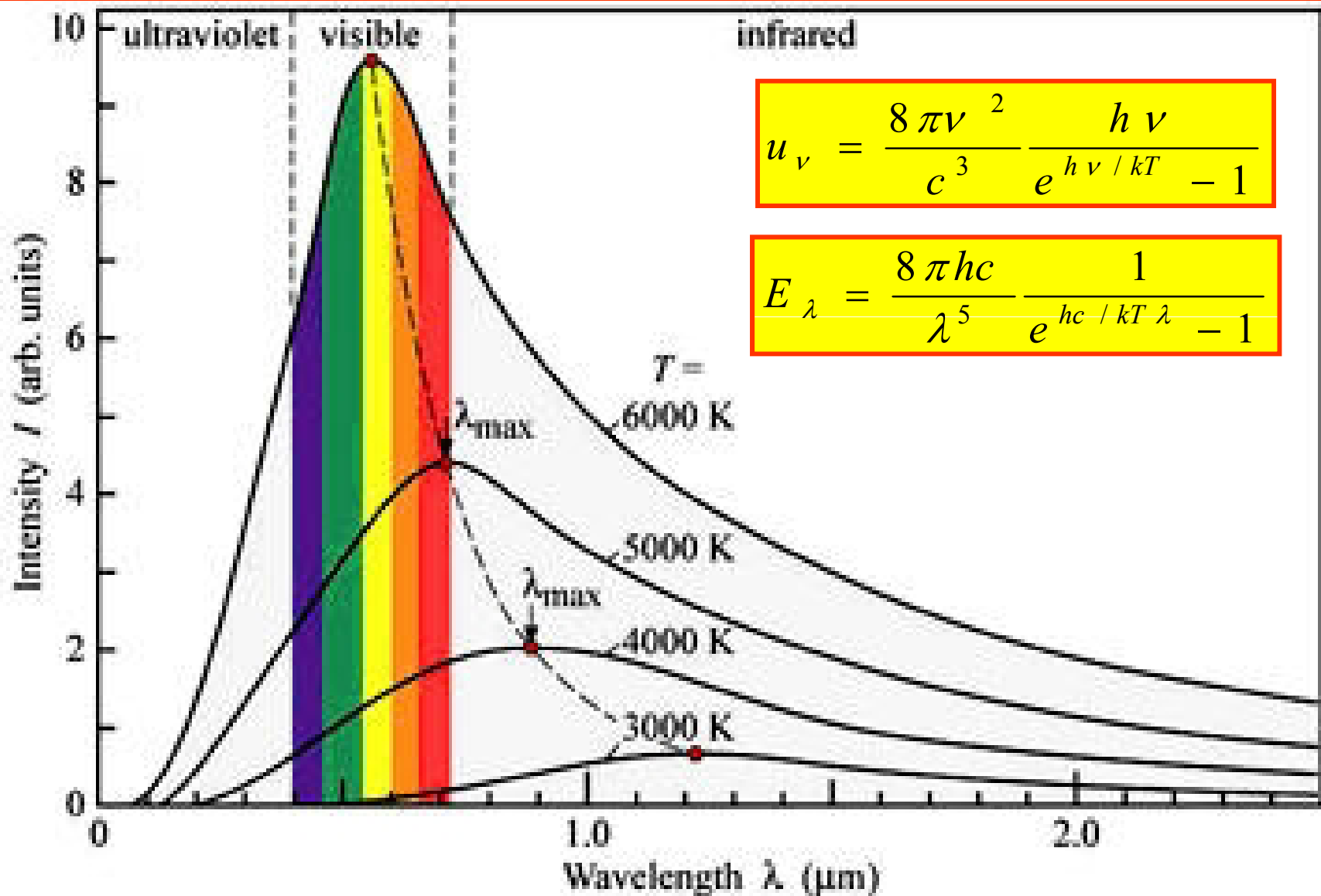
3) R. v. Kövesligethy, Grundzüge einer theor. Spectralanalyse.

Halle 1890.

Paschen F, Ueber Gesetzmässigkeiten in den Spectren fester Körper. *Annalen der Physik* (1896).

See also: Balázs G. Lajos, Theoretical astrophysics in the XIX. century. (Hommage á Radó von Kövesligethy). (2005)

## Planck-féle eloszlások különböző hőmérsékleteken



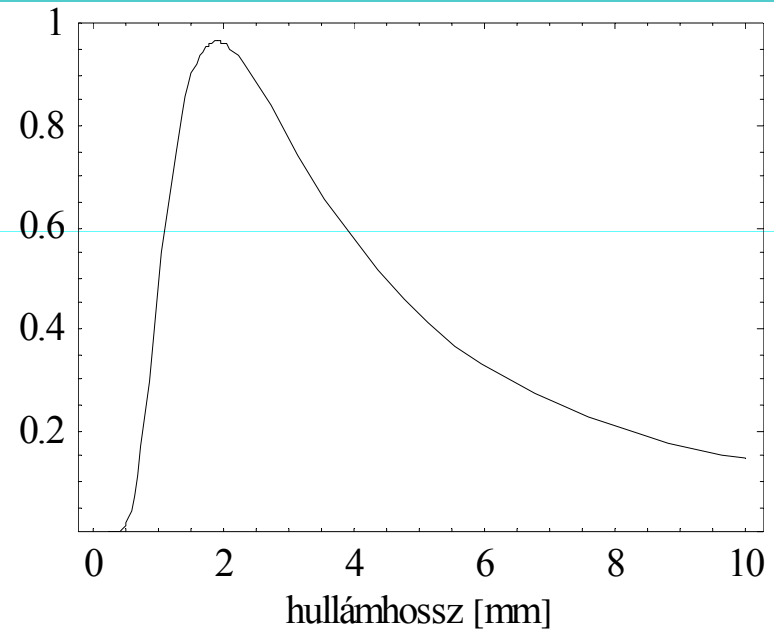
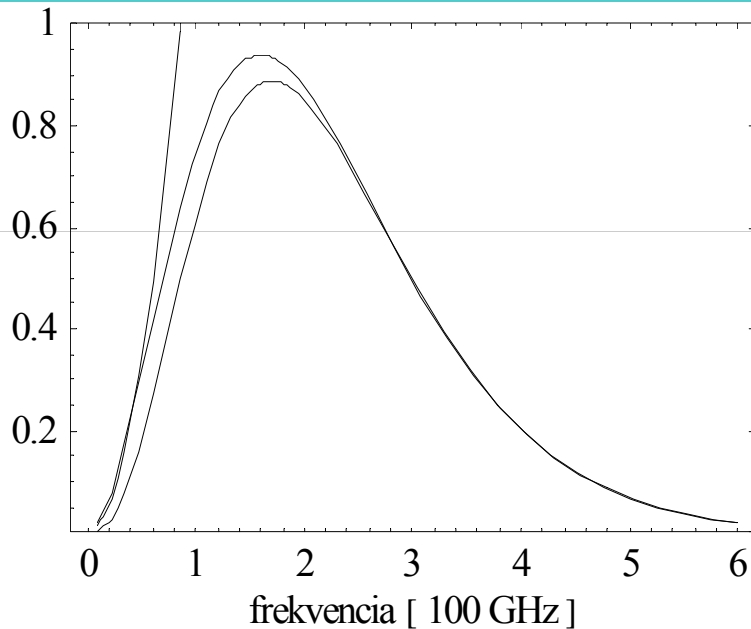
$$u_{\nu} = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \frac{h \nu}{e^{h \nu / kT} - 1}$$

$$E_{\lambda} = \frac{8 \pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc / kT \lambda} - 1}$$

## Planck-féle eloszlás; Cosmic Microwave Background

$$u_{\nu} = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \frac{h \nu}{e^{h \nu / kT} - 1}$$

$$E_{\lambda} = \frac{8 \pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc / kT \lambda} - 1}$$



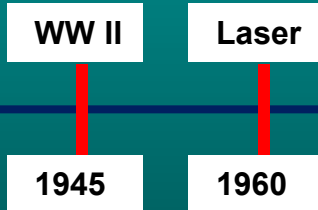
A hőmérsékleti sugárzás normált spektruma 2,725 Kelvin abszolút hőmérsékleten a Planck által 1900-ban levezetett formula alapján. Az 1.a ábrán a frekvenciától való függést ábráztuk. Itt feltüntettük külön a Rayleigh-Jeans (kisfrekvenciás) eredményt és a Wien-féle közelítést is, amely nagyfrekvenciás tartományban jól illeszkedik a pontos görbéhez. Az 1.b ábrán a vízszintes tengelyen a hullámhossz szerepel, figyelembe véve a összefüggést, ahol a vákuumbeli fénysebesség. [ Ez a görbe pontosan visszaadja a Koszmikus Mikrohullámú Háttérsugárzás fajlagos intenzitáseloszlását amelyet az 1989-ben felbocsájtott Cosmic Background Explorer ( COBE ) nevű űrszonda négy éven át végzett mérései alapján állapítottak meg. A szögeloszlás inhomogenitásait később szintén nagy pontossággal megmérték (Planck Mission...) .]





# Light (electromagnetic radiation): Wave and Particle. [ More than 50 Nobel Prize winners' research and results are explicitly related to 'photons'. ]

Röntgen 1901  
 Lorentz, Zeeman 1902  
 Rayleigh 1904  
 Lenard 1905  
 Thomson JJ 1906  
 Michelson 1907  
 Lippmann 1908  
 Marconi, Braun 1909  
 Wien 1911  
 Laue 1914  
 Bragg WH, Bragg WL 1915  
 Barkla 1917  
 Planck 1918 ←  
 Stark 1919  
 Einstein 1921  
 Bohr 1922  
 Millikan 1923  
 Siegbahn KMG 1924  
 Frank, Hertz 1925  
 Perrin 1926  
 Compton, CTR Wilson 1927  
 Richardson 1928  
 De Broglie 1929  
 Raman 1930  
 Heisenberg 1932  
 Schrödinger, Dirac 1933  
 Thomson GP, Davisson 1937  
 Fermi 1938  
 Stern 1943  
 Rabi 1944  
 Pauli 1945



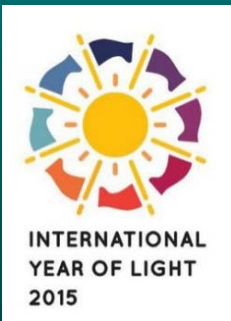
Bloch, Purcell 1952  
 Zernike 1953  
 Born, Bothe 1954  
 Lamb, Kusch 1955  
 Cherenkov, Frank, Tamm 1958  
 Hofstadter, Mössbauer 1961  
 Landau 1962  
 Wigner, Göppert-Mayer, Jensen 1963  
 Townes, Prokhorov, Basov 1964  
 Tomonaga, Schwinger, Feynman 1965  
 Kasler 1966  
 Bethe 1967  
 Gabor 1971  
 Kapitza, Penzias, Wilson 1978 ←  
 Blombergen, Schawlow, Siegbahn KM 1981  
 Chandrashekar, Fowler 1983  
 Ramsey, Dehmelt, Paul 1989  
 Chu, Cohen-Tannoudji, Phillips 1997  
 Alferov, Kroemer, Kilby 2000  
 Cornell, Ketterle, Wieman 2001  
 Glauber, Hall, Hänsch 2005  
 Mather, Smoot 2006 ←  
 Nambu, Kobayashi, Maskawa 2008  
 Kao, Boyle, Smith 2009  
 Haroche, Wineland 2012  
 Akasaki, Amano, Nakamura 2014



Laser 50: 2010

Laser Nobel (1964): 2014

2015 →



## Planck M., „On irreversible radiation processes” [ 1897-99, 1901 ]

## Planck M., Über irreversible Strahlungsvorgänge [ 1897-99, 1901 ]

- 27 Gegen die neuere Energetik.  
Wied. Ann. 57, S. 72–78, 1896
- 28 Über elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden.  
Wied. Ann. 60, S. 577–599, 1897
- 29 Notiz zur Theorie der Dämpfung elektrischer Schwingungen.  
Wied. Ann. 63, S. 419–422, 1897
- 30 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 1. Mitteilung  
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 57–68, 1897
- 31 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 2. Mitteilung  
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 715–717, 1897
- 32 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 3. Mitteilung  
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 1122–1145, 1897
- 33 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 4. Mitteilung  
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 449–476, 1898
- 34 Über irreversible Strahlungsvorgänge. 5. Mitteilung  
S.-B. Preuß. Akad. Wiss., S. 440–480, 1899
- 35 Die Maxwellsche Theorie der Elektrizität von der mathematischen Seite betrachtet.  
Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinigung 7, S. 77–89, 1899
- 36 Über irreversible Strahlungsvorgänge.  
Ann. d. Phys. (4) 1, S. 69–122, 1900
- 37 Entropie und Temperatur strahlender Wärme.  
Ann. d. Phys. (4) 1, S. 719–737, 1900
- 38 Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung.  
Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 2, S. 202–204, 1900
- 39 Ein vermeintlicher Widerspruch des magneto-optischen Faraday-Effektes mit der Thermodynamik.  
Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 2, S. 206–210, 1900

„Interpolation  
formula”  
[19. Oct. 1900]

$N \times U = P \times \varepsilon$ , where P integer;  
Quantization of the energy of  
an assembly of N resonators.  
 $\varepsilon = h \nu$  [14. Dec. 1900]

- 40 Kritik zweier Sätze des Herrn W. Wien.  
Ann. d. Phys. (4) 3, S. 764–766, 1900
- 41 Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum.  
Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 2, S. 237–245, 1900
- 42 Über die von einem elliptisch schwingenden Ion emittierte und absorbierte Energie.  
Ann. d. Phys. (4) 9, S. 619–628, 1902
- 43 Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum.  
Ann. d. Phys. (4) 4, S. 553–563, 1901
- 44 Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität.  
Ann. d. Phys. (4) 4, S. 564–566, 1901
- 45 Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie  
Ann. d. Phys. (4) 9, S. 629–641, 1902
- 46 Über irreversible Strahlungsvorgänge. Nachtrag.  
Ann. d. Phys. (4) 6, S. 818–831, 1901
- 47 Vereinfachte Ableitung der Schwingungsgesetze eines linearen Resonators im stationär durchstrahlten Felde.  
Phys. Zs. 2, S. 530–534, 1901
- 48 Über die Natur des weißen Lichtes.  
Ann. d. Phys. (4) 7, S. 390–400, 1902  
Abbildungen zu den Beiträgen 4 und 6  
Anmerkung zu Beitrag 4 (Seite 163) und Berichtigung zum Beitrag 14 (Wied. Ann. 36, S. 936, 1889)

M. Planck, Über irreversible Strahlungsvorgänge. 1– 2– 3 – 4 – 5. Mitteilungen. *Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wissenschaften* (1897-1899). 6. The results of the 1-5. Mitteilungen summarized in *Annalen der Physik* (1900-1).



**Planck's radiation law. The quadratic term is just the contribution from induced emission!**

## The "fortunate interpolation"

Planck (1897-1900): "Irreversible Strahlungsvorgänge" → Wien-formula

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$$

$$dS_t = dU \cdot \Delta U \cdot \frac{3}{5} \frac{d^2 S}{dU^2}$$

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{a\nu U}$$

"So waren meine Versuche, die Formel (2) [ entropy expression ] zu verbessern, an einem toten Punkt angelangt, und ich stand im Begriff, sie endgültig aufzugeben.

Da trat ein Ereignis ein, welches in dieser Angelegenheit Wendung bringen sollte."

"Über eine Verbesserung der Wienschen Spektrgleichung" (1900. okt. 19.)

**F. Kurlbaum & H. Rubens experiment: at very high temperature  $I \sim T$ ;**

**Planck:  $U=CT$**

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{C}{U^2}$$

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{1}{a\nu U + U^2 / C}$$

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T} = \frac{1}{a\nu} \cdot \log\left(1 + \frac{a'\nu}{U}\right)$$

# Planck's energy elements (elementary quantum of action, 1900). [ See also Debye's 'quantized e.m. modes' (1910).]



Spectral density:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$$

Wien's displacement law:

$$S = f(U/\nu)$$

U is the average energy of one Hertz oscillator

Thermodynamics:

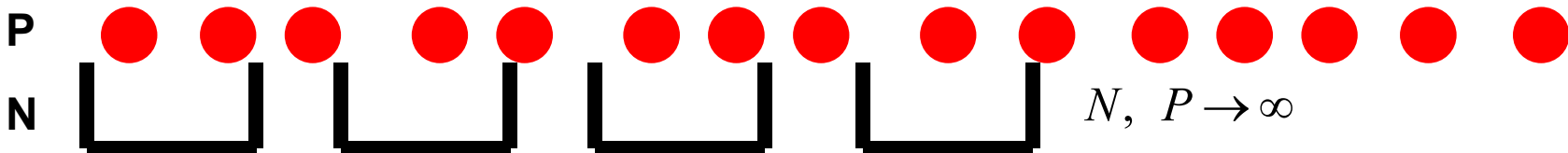
$$dS/dU = 1/T$$

Boltzmann's principle (1877)

$$S_N = k \log W_N$$

$$U_N = NU = P\varepsilon$$

"It comes about to find the probability W of that the N resonators altogether possess the oscillation energy  $U_N$ . To this end it is necessary to think of  $U_N$  as not being a continuous, unlimitedly divisible quantity, but rather a discrete quantity built up of a finite number of identical parts. When we call such a part an energy element  $\varepsilon$ , then we have to set :  $U_N = P\varepsilon$ , where P means an integer, generally a large number, and the value of  $\varepsilon$  is still to be determined."



$$S = k[(1 + \bar{n}) \log(1 + \bar{n}) - \bar{n} \log \bar{n}]$$

$$\bar{n} \equiv P/N = U/\varepsilon$$

$$\varepsilon = h\nu$$

Planck M, Ueber eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung. *Verhandlungen der Deutsch. Phys. Ges.* 2 (1900) 202-204. (Sitzung vom 19. October 1900.) Planck M, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Ibid.* 2 (1900) 237-245. (14. December 1900.) [ Debye P, Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung, *Ann. der Phys.*(4) 33, 1427-1434 (1910). ]

## **PLANCK's own assesment of the significance of $h$**

Born (1948) “**Planck was perfectly clear about the importance of his discovery.** We have not only the testimony of his wife but also an account of his son Erwin, given to and reported by Professor Bavink. It was in 1900 when his father, on a walk in the Grunewald, near Berlin, said to him: 'To-day I have made a discovery as important as that of Newton'. Planck has, of course, never said anything like that in public. His modest and reluctant way of speaking about his work has caused the impression that he did himself not quite believe in his result. Therefore, the opinion spread, especially outside Germany, that Planck 'did not seem to know what he had done when he did it', that he did not realize the range of his discovery. That this is wrong can clearly be seen from his autobiography; though it was written in his old age, we have no reason to doubt that it correctly reflects his thoughts in the years following his discovery.”

## Planck's derivation and the „Bose-Einstein distribution [1924]“.

### A Planck-Bose distribution [ Laue (1916), (Lorentz (1910)) ]

How many ways „can have” exactly “n” energy elements one oscillator ?

As many number of ways as we can distribute the rest P-n elements among the other N-1 oszcillators :

$$W_{N-1, P-n} = \frac{(N-2+P-n)!}{(N-2)!(P-n)!}$$

The relative frequency of those oscillators to which n elements belong, is:

$$\frac{P}{N} = \frac{U}{\varepsilon} \equiv \bar{n}$$

$$p_n = \frac{W_{N-1, P-n}}{W_{N, P}} = \frac{1}{1+\bar{n}} \left( \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n$$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$S = -k \sum_{n=0}^{\infty} p_n \log p_n = k \left[ (1+\bar{n}) \log(1+\bar{n}) - \bar{n} \log \bar{n} \right]$$

We can say instead of “oscillator”, “receptacles” (Natanson, 1911), “modes, cells”, Laue's elementary „Strahlenbündel“. [ Debye, 1910 ]

## Planck's 'heaviest' forgotten heritage.

Electromagnetic H theorem, "Natürliches Licht", "Molecular disorder"

Boltzmann (1872): ... $H_1 \geq H_2 \geq \dots \geq H_{n-1} \geq H_n \dots$  (Irreversibilität,  $H=-S$ )

Loschmidt (1876): "Umkehrwand" ... $H_n' \leq H_{n-1}' \leq \dots \leq H_2' \leq H_1' \dots$

Zermelo (1896) [Poincaré (1890)]: "Wiederkehrwand"

Boltzmann's response: **"Molecular disorder" POSTULATE.**

Planck (1896-1900): "Irreversible Strahlungsvorgänge"

Boltzmann's critics (1898): "convergent waves" ( $B \rightarrow -B$ )

"Denn der ganze Vorgang kann ebensogut auch in gerade umgekehrte Richtung verlaufen. Man braucht nur in irgendeinem Zeitpunkt das Vorzeichen aller magnetische Feldstärken, mit Beibehaltung der elektrischen Feldstärken, umzukehren. Dann saugt der Oszillator die in konzentrischen Kugelwellen emittierte in ebensolchen Kugelwellen wieder ein, und gibt die aus der erregenden Strahlung absorbierte Energie wieder von sich." Von Irreversibilität kann also bei einem derartigen Vorgang nicht die Rede sein."

Planck's response: **"Natürliches Licht" POSTULATE.**

( Source: Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums. *Fassung letzter Hand*. Naturwissenschaften. Vol. 31, pp. 153-159 (1943). )

# **PLANCK, THEORIE DER WÄRMESTRAHLUNG**

## **PLANCK, THEORY OF HEAT RADIATION**

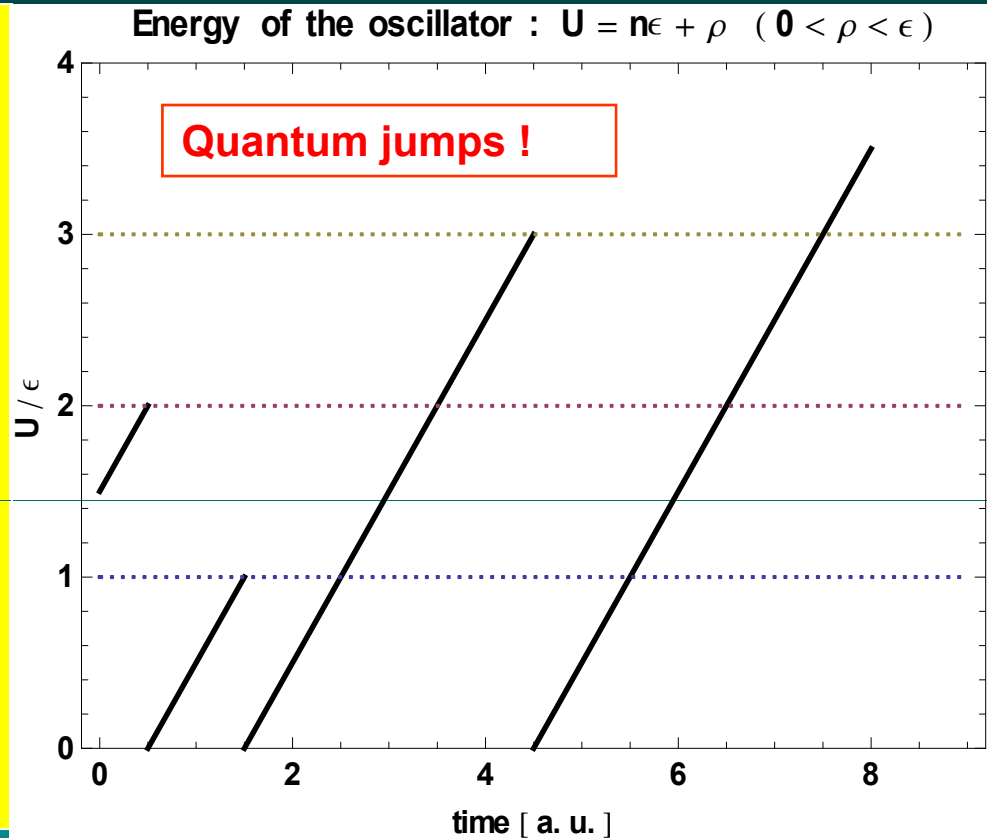
**“Probably no single book since the appearance of Clerk Maxwell’s ELECTRICITY AND MAGNETISM has had a deeper influence on the development of physical theories.”**

***Morton Masius: Translator’s preface ( 1914 )***



## **Planck's 'second theory'**

In 1911 Planck published his so-called 'second theory', in which he gave plausible arguments for the 'emission postulate':  $(1-\eta)/\eta=p\cdot u$ , i.e. the ratio of the probability that the oscillator does not emit and the probability of emission is proportional with the spectral energy density  $u$ . He calculated  $\rho=c^3/8\pi v^2 h\nu=B/A$ , where  $B$  and  $A$  are the 'Einstein coefficients' (1916). From this it follows that Planck's emission coefficient  $\eta=A/(A+B\cdot u)$  is the ratio of the 'spontaneous' and the complete, 'spontaneous+induced' emission probability.



**Figure 1.** Illustrates Planck's emission law [7], where the tilted straight lines represent the continuous energy increase of a particular oscillator. When a straight line crosses a dotted line (corresponding to integer multiples of the energy quantum  $\epsilon=hn$ ), then an emission *may* take place abruptly by chance, and a continuous increase of the energy starts again. In 1911 Planck derived the occupation probability of the  $n$ -th level  $P_n=b^n/(1+b)^{1+n}$ , where  $b=[\exp(h\nu/kT)-1]^{-1}$ . The time average of the fractional energy turns out to be  $h\nu/2$ , which is just the 'zero-point energy'. The distribution  $P_n$  is the so-called 'Bose-Einstein distribution', rediscovered by Bose in 1924.

**Planck's 'Second Theory' (1911): Rate equations;  
Induced emission; "Bose distribution"; zeropoint energy**

$$\frac{1-\eta}{\eta} = p \cdot u, \quad p = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 h\nu} = \frac{B}{A} = \frac{1}{Z_\nu \cdot h\nu}$$

**A and B are the Einstein's coefficients ( 1916-17 )**

$$\eta = \frac{A}{A+B \cdot u}$$

$$1-\eta = \frac{B \cdot u}{A+B \cdot u}$$

**The emission coefficient (  $\eta$  ) introduced by Planck, is nothing else but the ratio of the spontaneous and the total (spontaneous plus induced) rates.**

**Bose  
distribution.**

$$w_n = \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{1+n}}, \quad \beta = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \bar{n}$$

**Zero-point  
energy.**

$$u = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[ \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \right]$$

## Induced emission; constructive interference [ Einstein (1916) ]

b) **Einstrahlung**. Befindet sich ein Planck'scher Resonator in einem Strahlungsfelde, so ändert sich die Energie des Resonators dadurch, daß das elektromagnetische Feld der Strahlung auf den Resonator Arbeit überträgt; diese Arbeit kann je nach den Phasen des Resonators und des oszillierenden Feldes positiv oder negativ sein. Dementsprechend führen wir die folgende quantentheoretische Hypothesen ein. Unter der Wirkung der Strahlungsdichte  $\rho$  der Frequenz  $\nu$  kann ein Molekül vom Zustand  $Z_n$  in den Zustand  $Z_m$  übergehen, indem das Molekül die Strahlungsenergie  $\epsilon_m - \epsilon_n$  aufnimmt, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

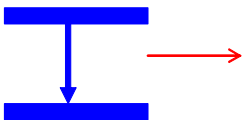
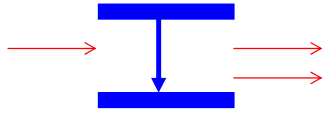
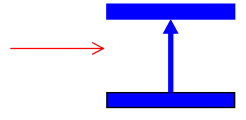
$$dW = B_n^m \rho dt. \quad (B)$$

Ebenso sei ein Übergang  $Z_m \rightarrow Z_n$  unter der Einwirkung der Strahlung möglich, wobei die Strahlungsenergie  $\epsilon_m - \epsilon_n$  frei wird, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = B_m^n \rho dt \quad (B')$$

$B_n^m$  und  $B_m^n$  sind Konstante. Beide Vorgänge nennen wir „Zustandsänderungen durch Einstrahlung“.

## Induced emission [Einstein, 1916], maser [1954], laser [1960]

Spontaneous emission : $N_2 A_2$	Induced emission : $N_2 B_2 \mathbf{u}$	Absorption : $N_1 B_1 \mathbf{u}$
		

Note. After Dirac (1927):

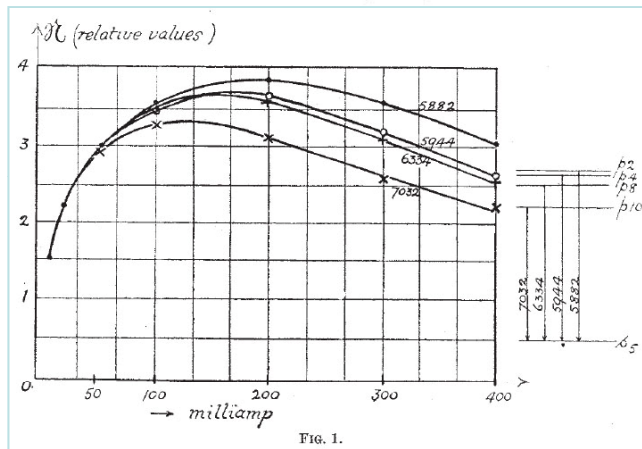
$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

If we distinguished (in one mode!) the spontaneous and stimulated emission á lá Einstein, then one may ask; which „1” corresponds to the spontaneous emission?

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{1+1+\dots+1}$$



Experimental Proof of 'Negative Dispersion.'



H. KOPFERMANN,  
R. LADENBURG.

Kaiser Wilhelm Institut für physikalische  
Chemie und Elektrochemie,  
Berlin, Dahlem,  
July 28.

“In the Planck formula of temperature radiation, the  $-1$  in the denominator  $[\exp(h\nu/kT) - 1]$  results from taking the processes of negative absorption into account. This  $-1$  gives the whole difference between the formulae of Planck and W. Wien. It is well known, from the experiments of Lummer-Pringsheim and Rubens-Kurlbaum, that the difference between these two formulae and also the validity of the Planck formula, come out the more clearly the smaller the relation, that is, the larger the temperature (or the excitement) and the larger the wavelength.”

H. Kopfermann and R. Ladenburg *Experimental Proof of 'Negative Dispersion'*, *Nature* Volume 122, 438-439 (22 September 1928).

# Planck's 'third theory'. [ It also offers the first theoretical interpretation of the Franck-Hertz experiment. ]

„Wenn nun diese Bedingung [  $qr < f$  ] erfüllt ist und ein Zusammenstoß erfolgt, so soll der Energieaustausch zwischen Partikel und Oszillator stets in der Weise stattfinden, daß der Oszillator seine ganze augenblickliche Schwingungsenergie an die Partikel abgibt, während gleichzeitig die Partikel nur das größte Vielfache des Energiequantums  $h\nu$ , welches in ihrer kinetischen Energie enthalten ist, an den Oszillator abgibt. Wenn also z. B. die kinetische Energie der Partikel kleiner ist als  $h\nu$ , so gibt sie gar keine Energie an den Oszillator ab<sup>1</sup>.

„...Thus, e.g. if the kinetic energy of the particle is smaller than  $h\nu$ , then it does not give energy to the oscillator at all.”

-----  
**Fußnote<sup>1</sup>: Diese Hypothese erhält eine experimentelle Stütze durch die wichtigen Resultate der neuesten Untersuchungen von J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Physik. Ges. 16, S. 512, 1914.”**

Max Planck, Eine veränderte Formulierung der Quantenhypothese. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1914, 918-923 (1914). (Vorgetragen am 23. Juli 1914)





PHYSICAL REVIEW E 85, 056409 (2012)

## Photoelectric Franck-Hertz experiment and its kinetic analysis by Monte Carlo simulation

Péter Magyar, Ihor Korolov, and Zoltán Donkó

Research Institute for Solid State Physics and Optics of the Hungarian Academy of Sciences, P.O.B. 49, H-1525 Budapest, Hungary

(Received 21 December 2011; revised manuscript received 20 April 2012; published 18 May 2012)

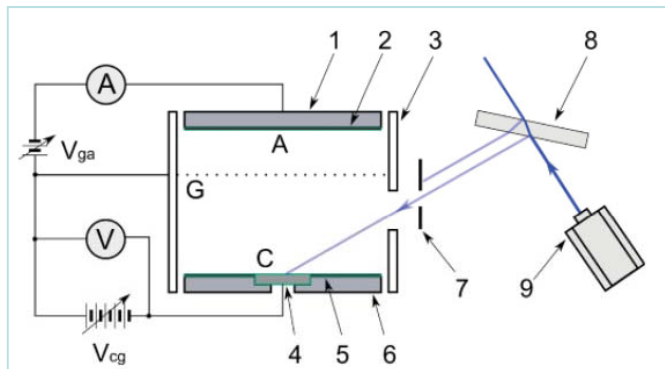


FIG. 1. (Color online) Experimental apparatus: the FH cell, the electrical connections, and the scheme of laser illumination. 1: anode disk, 2, 5: Mo plates, 3: confining (Al) cylinder, 4: Mg disk, 6: cathode disk, 7: slit, 8: quartz plate, 9: laser, G: grid. The vacuum chamber is not shown.

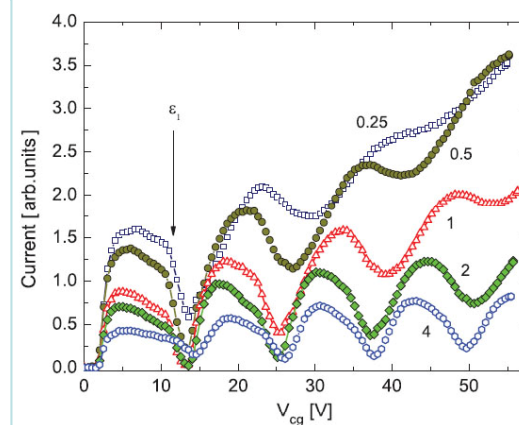


FIG. 2. (Color online) Experimental results: the FH characteristics for different pressures. The labels of the curves give the pressure in mbar; the arrow shows the first excitation level of Ar atoms.

J. Franck und G. Hertz, Über die Erregung der Quecksilberresonanzlinie 253,6 mm durch Elektronenstöße. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* 16. Jahrg. 15. April 1914., Nr. 7., Seiten 512-517 (1914).



**Planck's contribution to the special  
relativity theory**

## **Results by Planck concerning the relativity**

- **The foundation of the relativistic dynamics. [ Appendix]**
- **The exact derivation of the velocity-dependent mass-increase. The detailed comparison with the experiments by Kaufmann. [ Appendix ]**
- **The relativistic generalization of the Principle of Least Action due to Helmholtz.**
- **The foundation of the relativistic thermodynamics (within this; the determination of the transformation rules of the black-body radiation).**
- **The general derivation of the “  $E=mc^2$  ” relation**

**Max Planck in Hungary.**

## 26 April 1940. Max Planck was elected to an external member of the Hungarian Academy of Sciences

**A Magyar Tudományos Akadémia Max Planckot 1940. április 26-án választotta meg külső taggá 41 szóval 1 ellenében (Akadémiai értesítő, 1940. 17. o.).**

**A III. osztályba külső tagnak ajánlották: Pogány Béla r. tag, Rybár István r. tag, Hoór-Tempis Mór r. tag, Ortvay Rudolf l. tag és Bay Zoltán l. tag.**

**"A M. T. Akadémia III. osztályába külső tagnak tisztelettel ajánljuk PLANCK MIKSA titkos tanácsost, a berlini egyetem kiérdemesült tanárát, a porosz Tudományos Akadémia évek során volt titkárát, a Kaiser Wilhelm Institut volt elnökét, a fizikai Nobel-díj nyertesét, számos tudományos társaság tagját, német állampolgárt. Planck régebbi munkássága főképp a termodinamikára vonatkozik melyet számos mélyreható eredménnyel gazdagított. Így Gibbs gondolata csak Planck vizsgálatai segítségével váltak a tudományos világ közkincsévé. Felemlíthetjük a Galván-elemek termodinamikájára vonatkozó fontos vizsgálatait, valamint a relativisztikus mechanikára vonatkozó mélyenjáró fejtegetéseit. Termodinamikai vizsgálatait vezették a múlt század kilencvenes éveiben az ún. fekete test sugárzásának problémájára. E problémát egy alapvető és annakidején igen idegenszerű gondolat: az energia-, ill. hatáskvantum fogalmának bevezetésével oldotta meg, és evvel egy oly gondolatot vezetett be a fizikába, mely azt a lefolyt 40 év alatt mélyrehatóan átalakította, a mai atomelméletet lehetővé tette, és ma is a fizika alapjaira vonatkozó minden kutatás alapja. Planck Miksa ma a tudományos világ köztiszteletben álló egyik legnagyobb tekintélye, és mivel hazánk ügye iránt érdeklődik és Budapesten néhány év előtt előadást is tartott, helyesnek tartanók, ha Akadémiánk is kifejezné hódolatát Planck Miksa iránt és megtisztelné önmagát avval, hogy külső tagjai sorába iktatná." (Magyar Tudományos Akadémia. Tagajánlások 1940-ben. Bp. 1940 81. o.)**

Source: Györgyi G, Max Planck Magyarországon. Fizikai Szemle 1972/10. 307.o.

# Planck in Hungary [1936].



See wissen bei Bruch s. d. Max, St. amass

21. 5. 36.

Kochschterer Hr. College! Die vier die Pölkessse  
entweder, liegt mir daran, Ihnen zugleich im Namen  
meiner noch einen Abschiedsgruß zu senden sind noch  
dann unser aufrichtiges und herzlichste Dank zu sagen  
für die liebenswürdige Aufnahme, die Sie mir bewahrt haben  
vor werden die vielfache interessante Eindrücke - Kunst- und  
Natur - die wir in dem schönen Budapest gesehen haben, Ihre im  
Licht der Gegenwart. Die letzte Abschiedsgruß, die Sie uns in  
Ihre auch in der Hand gedrückt haben, hat uns unendlich  
ganz unendlich. Hoffentlich sehen wir uns in nächster zu fernem Zeit  
wieder. Mit kollegialen Grüßen  
Max Planck

Planck's postcard to his host, Rudolf Ortway.

copied from: Györgyi G, Max Planck Magyarországon. Fizikai Szemle 1972/10. 307.o.

# Host of Max Planck in Hungary: Rudolf Ortway [1885-1945].

1911.

№ 11

## ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 36.

1. *Über die Dielektrizitätskonstante  
einiger Flüssigkeiten bei hohem Druck;  
von Rudolf Ortway.*

(Der kgl. ung. Akademie der Wissenschaften vorgelegt in der Sitzung  
am 19. Juni 1911.)

„On the dielectric permittivity of some  
fluids by large pressure”

„On counting the eigen-  
oscillations of solids”

3. *Über die Abzählung der Eigenschwingungen  
fester Körper;  
von Rudolf Ortway.*

1. Einleitung und Allgemeines.

In der Quantentheorie der spezifischen Wärme der festen Körper, wie sie von P. Debye<sup>1)</sup> entwickelt wurde, ist die Bestimmung des akustischen Spektrums der festen Körper erforderlich. Debye hat das akustische Spektrum der isotropen

Ortway R, Über die Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeiten bei hohem Druck. *Annalen der Physik* (4) 36, 1-24 (1911). Ortway R, Über die Abzählung der Eigenschwingungen fester Körper. *Annalen der Physik* (4) 42, 745-760 (1913).

# Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat. ORTVAY Rudolf. Kollokviumok.



**Ortvay Rudolf** "A de Broglie és Schrödinger-féle hullámmechanika" (1927). "A vegyérték problémája a quantummechanikában" (1928)

**Arnold Sommerfeld** "A fémek elektronelméletéről és az elektron természetéről"(1930)

**Tisza László** „A rádióaktív bomlás kvantummechanikai tárgyalása”

**Neumann János** „Dirac-egyenlet és elektronspin”

**Ortvay Rudolf** „A Heisenberg-féle reláció”

**Schay Géza** „A kétféle hidrogén”

**Neumann János** „A Dirac-féle fényelmélet”

**Bródy Imre** „Fémek elektron-elmélete”

**Lánczos Kornél** „Stark-effektus erős mágneses térben”

**Neugebauer Tibor** „Perturbációelmélet Schrödinger szerint”

**Teller Ede** „Kéttomos molekulák felépítése”

**Wigner Jenő** „A kémiai kötés kvantumelmélete.

**Füstöss László, A modern fizika érkezése (1919-1945). Fizikai Szemle 1991/11. 381.o.**

Committee of Laser Physics; Joint Committee of the History of Science and Technology



*10-11 October 2018*

# **PLANCK 2018**

## **Memorial Scientific Symposium**

*Central Building*

**Hungarian Academy of Sciences**

**Nagyterem (Budapest V., Széchenyi tér 9. II. em.)**

**[ No registration fee ]**

**[ Chairmen: S Varró, M Bonitz and B Láng ]**



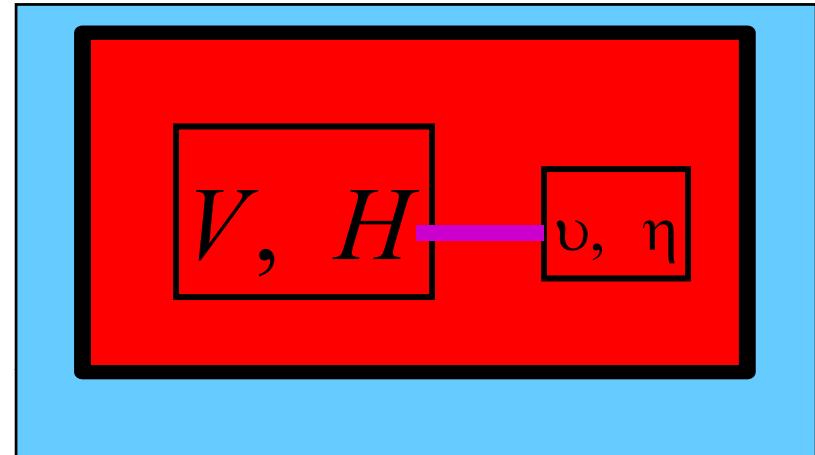
**Energy fluctuations of the radiation field.**

# Einstein's fluctuation formula (1909), "Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems"

Put two thermodynamically communicating boxes,  $V$  and  $v$ , into a Hohlraum filled with thermal radiation, their energies are  $H$  és  $\eta$ , resp. After equilibrium sets in, due to homogeneity we have  $H_0:\eta_0=V:v$ .  $S=\Sigma+\sigma$ . Energy:  $\eta=\eta_0+\varepsilon$ , where  $\varepsilon$  random deviation from  $\eta_0$ . Entropy:  $S=k\log W$ ,  $dW=\exp(S/k)d\eta$ . We expand  $S$  up to second order in  $\varepsilon$ . We obtain a Gaussian in energy!

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = \text{const} \times \exp\left\{-\frac{1}{2k} \left| \frac{d^2\sigma}{d\eta^2} \right|_0 \varepsilon^2\right\}$$

$$\Delta\eta^2 \equiv \overline{(\eta - \eta_0)^2} = \overline{\varepsilon^2} = \left\{ \frac{1}{k} \left| \frac{d^2\sigma}{d\eta^2} \right|_0 \right\}^{-1}$$



$$\Delta\eta^2 = h\nu\eta_0 + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu} \cdot \frac{\eta_0^2}{\nu}$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\eta^2} = \frac{1}{m_\nu} \cdot \frac{d^2S}{dU^2} = \frac{1}{m_\nu} \frac{a}{U(b+U)}$$

$$m_\nu = Z_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot d\nu \cdot \nu$$

**Connection with Planck's interpolation formula.  
M. von Laue on the fluctuation formula (1912).**

$$\frac{d^2\sigma}{d\eta^2} = \frac{1}{m_\nu} \cdot \frac{d^2S}{dU^2} = \frac{1}{m_\nu} \frac{a}{bU + U^2}$$

Rayleigh-Jeans:  
Gauss,  
(continuous)

Planck: "Bose"; geometric

Wien: Poisson (discrete)

$$p_n = \frac{1}{1 + \bar{n}} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n$$

$$\Delta n^2 = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{M}$$

$$\Delta E^2 = h\nu\bar{E} + \frac{\bar{E}^2}{M}$$

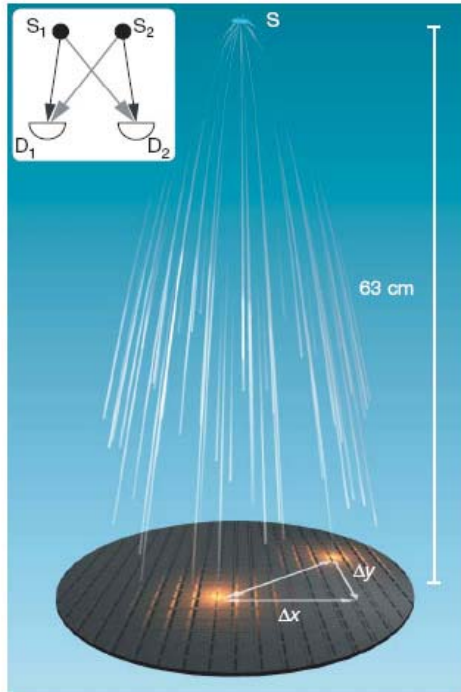
„Particle term“

$$M = VZ_\nu d\nu = V \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

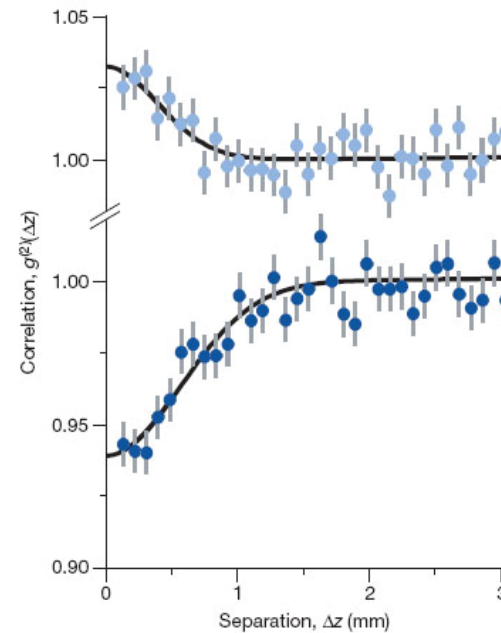
„Wave term“  
reponsible for  
„bunching“

In fact, Laue derived the fluctuation formula from the „Bose distribution“ for the many-mode case. He described the „photon bunching“ in thermal radiation in the same manner, as one often does nowadays.

**Boson correlations [ He<sup>4</sup> ] and Fermion correlations [ He<sup>3</sup> ] between atoms released from a trap [ In Hanbury Brown Twiss type Experiments; 2007 ] [ See ref; S. V.'s analysis using the method of Planck and Laue ]**



**Figure 1 | The experimental set-up.** A cold cloud of metastable helium atoms is released at the switch-off of a magnetic trap. The cloud expands and falls under the effect of gravity onto a time-resolved detector (microchannel plate and delay-line detector). The horizontal components of the pair separation are Δx and Δy. The inset shows conceptually the two atoms (black or grey) that interfere to give bunching or antibunching at the initial positions of two identical atoms joined by a dashed line.



**Figure 2 | Normalized correlation functions for <sup>4</sup>He<sup>+</sup> (bosons) in the upper plot, and <sup>3</sup>He<sup>+</sup> (fermions) in the lower plot.** Both functions are measured at the same cloud temperature (0.5 μK), and with identical trap parameters. Error bars correspond to the square root of the number of pairs in each bin. The bosons show a bunching effect, e.g. The correlation length for <sup>3</sup>He<sup>+</sup> is 0.75 ± 0.07 mm for <sup>4</sup>He<sup>+</sup> owing to the smaller mass. We observe antibunching for bosons, respectively.

$$\frac{\overline{\xi \cdot \eta}}{\overline{\xi} \cdot \overline{\eta}} = 1 \pm \frac{1}{M} = 1 \pm \frac{1}{M_x M_y M_{l \text{ or } t}}$$

T. Jelte et al., Nature 445, 402–405 (2007). [ S. V., The role of self-coherence in correlations of bosons and fermions. Notes on the wave – particle duality. Fortschritte der Physik 59, 296 – 324 (2011). ]

# Die Energieschwankungen bei der Superposition periodischer Schwingungen.

VON MAX PLANCK.

---

Die Frage, nach welchem statistischen Gesetz die Energie einer gegebenen Anzahl von übereinandergelagerten periodischen Wellen mit gleichen Energieen und kleinen zufälligen Schwingungszahldifferenzen zeitlich hin und her schwankt, ist wohl noch niemals näher behandelt worden, vermutlich weil ihre allgemeine Lösung der Rechnung allzu große Schwierigkeiten bietet. Und doch bildet ihre Beantwortung eine wichtige Vorbedingung für ein näheres Eindringen in das zur Zeit noch dunkle Gebiet der Strahlungsschwankungen. Daher möchte ich im folgenden einen angenehmen Ausdruck für dieses Gesetz aufstellen und denselben für einige besondere Fälle näher untersuchen.

## Planck M., Energy fluctuations by superposition of periodic oscillations [ 1923 ]

Das Problem läßt sich allgemein folgendermaßen formulieren. Wenn eine gegebene Anzahl  $p$  von periodischen Wellen mit der nämlichen Energie  $\epsilon$  und nahezu gleicher Frequenz sich übereinanderlagert, so werden wegen der gegenseitigen Interferenz in der resultierenden Energie Schwankungen auftreten, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Energie der resultierenden Schwingung zu irgendeiner Zeit einen zwischen  $E$  und  $E + dE$  befindlichen Wert besitzt, wird durch einen Ausdruck von der Form  $W(E) \cdot dE$  gegeben sein, wobei:

$$\int_0^{\infty} W(E) \cdot dE = 1. \quad (1)$$

Es handelt sich darum, die Funktion  $W(E)$  zu finden, für jeden gegebenen Wert der ganzen Zahl  $p$ .

Nehmen wir zunächst  $p = 1$ , so haben wir den trivialen Fall einer einzigen Schwingung mit der Energie  $\epsilon$ . Die resultierende Energie  $E$  ist dann konstant  $= \epsilon$ , und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsfunktion  $W_1(E)$  ist für alle Werte von  $E$  gleich Null, mit Ausnahme des Wertes  $E = \epsilon$ , für welchen sie unendlich groß wird.

Für  $p = 2$  setzen sich die beiden Schwingungen zusammen zu einer einzigen Schwingung mit periodisch wechselnder Amplitude, d. h. sie bilden periodische Schwebungen. Nach dem Interferenzgesetz ist dann die resultierende Energie:

$$E = 2\epsilon + 2\epsilon \cos \phi = 4\epsilon \cos^2 \frac{\phi}{2}, \quad (2)$$

„A probléma a következőképpen fogalmazható meg általánosan. Ha egy adott  $p$  számú, ugyanolyan energiájú és közelítőleg azonos frekvenciájú periodikus hullám szuperponálódik, akkor az eredő energiában ingadozások lépnek fel az interferencia miatt, és annak a valószínűsége hogy valamely időben ez  $E$  és  $E + dE$  értékek között van  $W(E)dE$  alakban fejezhető ki, ahol... (1)... Arról van szó, hogy a  $W(E)$  függvényt megtaláljuk minden adott értékű egész  $p$  számra.”



## Phenomenological Theory of Laser Beam Fluctuations and Beam Mixing\*

L. MANDEL

*Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York*

(Received 16 December 1964)

The paper contains a quantum theoretical analysis of laser beam fluctuations and of the light beat experiments with two lasers. With the help of experimental results on photon counting fluctuations in a single-mode laser field, some correlation properties of the field are derived. It is shown that the correlation equations are satisfied by states of the field which are much more general than "coherent" states. The equations lead directly to the spectral density of the intensity operator in the light beat experiments, which can be obtained from photoelectric measurements. The resulting expression is practically identical to that found by Forrester for light having thermal statistical properties. The reasons for this are discussed by a comparison of the corresponding probability distributions of photon counts and of the classical wave amplitude.

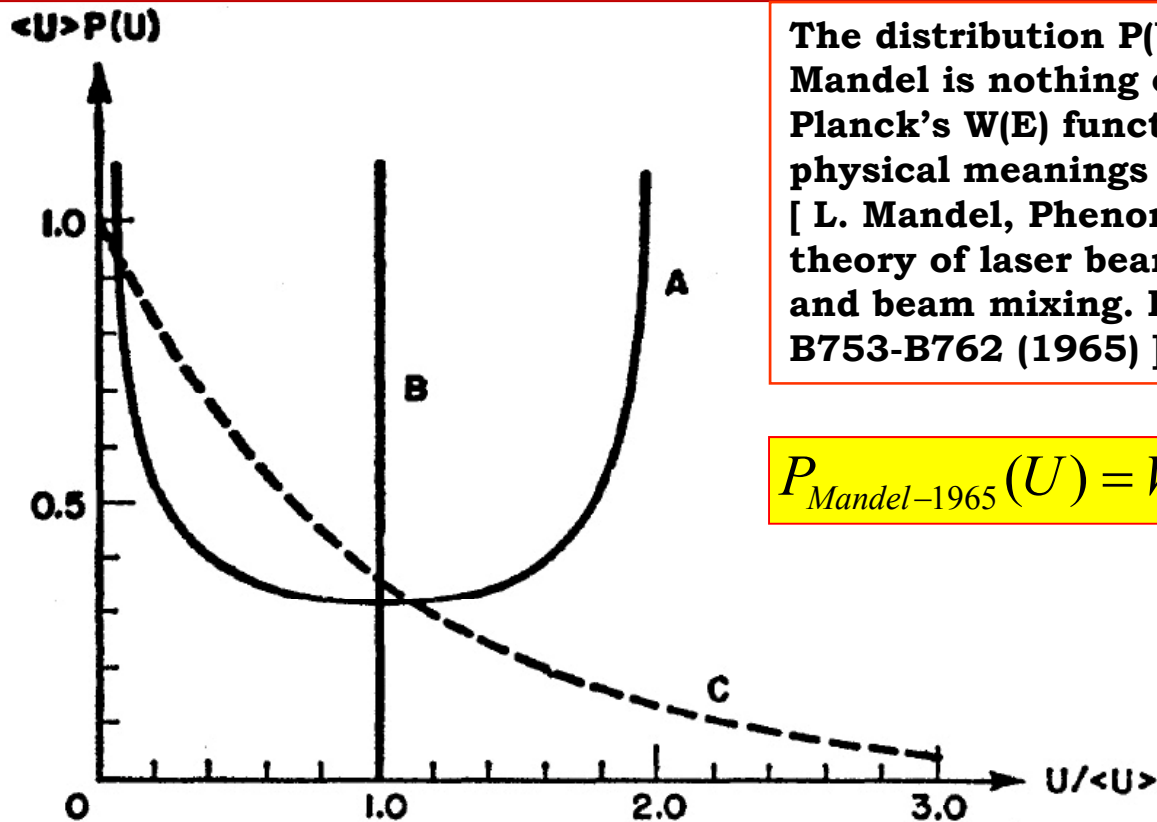
### 1. INTRODUCTION

**T**HE problem of determining the optical spectrum of a laser beam from beat experiments with two or more lasers is of interest, not only because of its practical importance, but because it involves the fluctua-

excursion of the beat notes, reflected in the spectral range of the photoelectric signals, as a measure of the spectral width of the light itself. To an order of magnitude this measure will undoubtedly be valuable. However, in order to arrive at a quantitative relation be-

\* This research was supported in part by the U. S. Army Research Office (Durham) and by the U. S. Air Force Cambridge Research Laboratories.

Fluktuációk lézernyaláiban, termikus, koherens [ L. Mandel,1965 ]<sub>3</sub>



The distribution  $P(U)$ , derived by Mandel is nothing else but Planck's  $W(E)$  function, their physical meanings coincide, too. [ L. Mandel, Phenomenological theory of laser beam fluctuations and beam mixing. Phys. Rev.138, B753-B762 (1965) ]

$$P_{Mandel-1965}(U) = W_{Planck-1923}(E)$$

FIG. 2. The probability distributions of  $U$  for A, a two-mode laser field; B, a single-mode laser field; and C, a polarized thermal field.



## Probability distributions of wave amplitudes [ L. Mandel, 1965 ]<sub>5</sub>

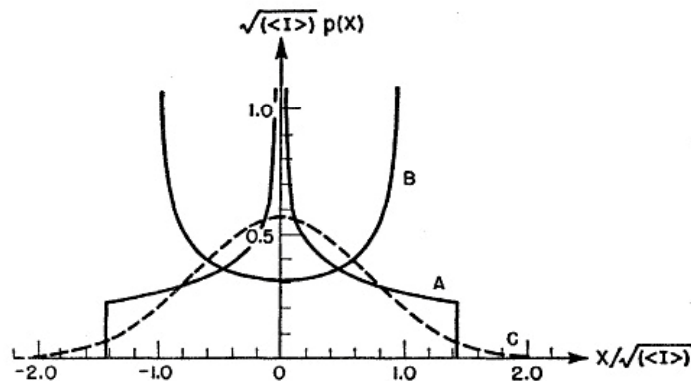


FIG. 3. Probability distributions of the classical wave amplitude for A, a two-mode laser field; B, a single-mode laser field; and C a polarized thermal field.

mode (Poisson) distribution having a single peak at  $n \approx \langle n \rangle$ , and the (Bose-Einstein) distribution for a polarized thermal field which decreases exponentially from  $n=0$ .

Finally let us make use of the distribution  $P(U)$  given by (43) to calculate the distribution  $p(X)$  of the

$P_{Mandel-1965}(U) = W_{Planck-1923}(E)$  on the instantaneous classical field amplitude. We have already noted that, for  $T$  very short compared with the reciprocal frequency spread of the light,

by integration over  $Y$ ,

$$\mathcal{P}(X) = \int_{-\sqrt{2\langle I \rangle - X^2}}^{\sqrt{2\langle I \rangle - X^2}} \frac{1}{\pi^2 [\langle I \rangle^2 - (X^2 + Y^2 - \langle I \rangle)^2]^{1/2}} dY, \quad X \leq \sqrt{2\langle I \rangle}.$$

With the help of the substitution  $Y = [(2\langle I \rangle - X^2) \times (1 - x^2)]^{1/2}$  the integral may be transformed to

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &= \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\left(\frac{2}{\langle I \rangle}\right)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)} \sqrt{(1-x^2)[1-X^2/2\langle I \rangle]}} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\left(\frac{2}{\langle I \rangle}\right)} K[\sqrt{(1-X^2/2\langle I \rangle)}] \\ &= 0 \quad \text{otherwise,} \end{aligned} \quad (48)$$

where  $K$  is the complete elliptic integral of the first kind. This distribution is illustrated in Fig. 3, where the corresponding probability distributions for a single-mode laser beam and a beam from a polarized thermal source are shown for comparison.<sup>38</sup> The same distribution (48) was also found by Hodara<sup>39</sup> for the superposition of two strictly sinusoidal oscillations with random phases.

L. Mandel, Phys. Rev. 138, B753-B762 (1965)

<sup>38</sup> L. Mandel, *Quantum Electronics, III* (Columbia University Press, New York, 1964), p. 101.

<sup>39</sup> H. Hodara (to be published). ←

**Planck's system of natural units [1889].**

**‘The black hole war’. „Planck invents a better yardstick”**

of the solar system, the Planck length would be no bigger than a virus. It is to Planck’s everlasting credit that he realized that such impossibly tiny dimensions must play a basic role in any ultimate theory of the physical world. He didn’t know what that role would be, but he might have guessed that the smallest building blocks of matter would be “Planck sized.”

The unit of time that Planck required to make  $c$ ,  $G$ , and  $h$  equal to one was also unimaginably small — namely  $10^{-42}$  seconds, the time it takes light to travel one Planck length.

Finally, there is Planck’s unit of mass. Given that the Planck length and the Planck time are so incredibly small (in ordinary, bio-friendly units), it would be natural to expect the Planck unit of mass to be much smaller than the mass of any ordinary object. But there you would be wrong. It turns out that the most basic unit of mass in physics is not terribly small on the biological scale: roughly the mass of ten million bacteria. It’s about the same as the mass of the smallest object that can be seen with the naked eye — a dust mote, for example.

These units — the Planck length, time, and mass — have an extraordinary meaning: they are the size, half-life, and mass of the smallest possible black hole. We will return to this point in later

**PLANCK'S 'NATURAL SYSTEM OF UNITS' [ 1899: before " h " !]**

§ 25. Zahlenwerthe.

Die Werthe der universellen Constanten  $a$  und  $b$  lassen sich mit Hülfe der vorliegenden Messungen mit ziemlicher Annäherung berechnen.

Hr. F. KURLBAUM<sup>2</sup> hat gefunden, dass, wenn man mit  $S_t$  die gesammte Energie bezeichnet, die von 1<sup>cm</sup> eines auf  $t^\circ$  Cels. befindlichen schwarzen Körpers in 1 Secunde in die Luft gestrahlt wird:

$$S_{100} - S_0 = 0.01763 \text{ gr. cal.}$$

Andererseits beträgt nach (52) die gesammte von der Flächeneinheit eines schwarzen Körpers in der Zeiteinheit nach allen Richtungen des Halbraumes ausgestrahlte Energie:

$$\begin{aligned} \int K \cos \vartheta \, d\Omega &= K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \pi K \\ &= \frac{12\pi b \vartheta^4}{c^2 a^4} . \end{aligned}$$

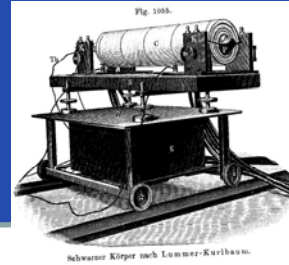
Folglich, wenn das mechanische Wärmeäquivalent zu  $419 \cdot 10^5$  angenommen wird, im absoluten C.G.S.-Maasse:

$$\frac{12\pi b (373^4 - 273^4)}{c^2 a^4} = 0.01763 \cdot 419 \cdot 10^5$$

oder, da  $c = 3 \cdot 10^{10}$ :

$$\frac{b}{a^4} = 1.278 \cdot 10^{15} . \quad (57)$$

**Planck's natural system of units (1889). Planck length, mass, time, temperature  $l_P, m_P, t_P, T_P$ .**



Wien (1896)

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot b\nu \cdot e^{-\frac{a\nu}{T}}$$

$h\nu \gg kT$

←

$\bar{n} \ll 1$

Planck (1900)

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot h\nu \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Recent notation and numerical values:

$$b \rightarrow h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$$

$$a \rightarrow h/k = 4.798 \times 10^{-11} \text{ cm} \cdot \text{K}$$

“...it would not be without interest to note, that, with the help of the constants **a** and **b** appearing in the expression (41) of the radiation entropy [Wien entropy derived by Planck using general considerations], there is a possibility given, to define units for **length, mass, time** and **temperature**, which, independently from special bodies or substances, keep their meaning for all times and for all, also extraterrestrial and non-human cultures, which then might be called »**natural units of measure**«.

Planck M, Über irreversible Strahlungsvorgänge. 5. Mitteilung. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. S. 449-476 (1898).

**Planck's natural system of units (1889).  
Planck length, mass, time, temperature  
 $l_P, m_P, t_P, T_P$ .**



“The mean to define the four units for length, mass, time and temperature is secured by the mentioned constants **a** and **b**, further, by the velocity of propagation of light **c** in vacuum, and by gravitation constant **f**. Expressed in centimeters, grams, seconds and degrees Celsius, the numerical values of these four constants are as follows:”

$$a = 0.4818 \cdot 10^{-10} [\text{sec} \times \text{Celsiusgrad}]$$

$$b = 6.885 \cdot 10^{-27} \left[ \frac{\text{cm}^2 \text{gr}}{\text{sec}} \right]$$

$$c = 3.00 \cdot 10^{10} \left[ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]$$

$$f = 6.685 \cdot 10^{-8} \left[ \frac{\text{cm}^3}{\text{gr} \cdot \text{sec}^2} \right]^1$$

Recent values

$$a = 0.4798 \cdot 10^{-10} [\text{sec} \cdot \text{K}]$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-27} \left[ \frac{\text{cm}^2 \text{gr}}{\text{sec}} \right]$$

$$c = 299\,792\,458 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$G = 6.6732 \cdot 10^{-8} \left[ \frac{\text{cm}^3}{\text{gr} \cdot \text{sec}^2} \right]$$

Planck M, Über irreversible Strahlungsvorgänge. 5. Mitteilung. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. S. 449-476 (1898). [Footnote: <sup>1</sup> F. Richardz und O. Krigar-Menzel, Anhang zu den Abhandlungen dieser Akademie vom Jahre 1898 S. 110, im Auszug: *Wied. Ann.* 66. S. 190, 1898.]

**Planck's natural system of units (1889).  
Planck length, mass, time, temperature  
 $l_P, m_P, t_P, T_P$  .**



**“One now chooses the »natural units« so, that in the new system of measure all the four constants take the value 1, then one receives the quantities ”**

as unit of length:

$$\sqrt{\frac{bf}{c^3}} = 4.13 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$$

[ modern definitions ( with h-bar:  $\hbar/2\pi$  ! ) ]

$$l_P = \sqrt{\hbar G / c^3} = 1.616 \times 10^{-35} \text{ m}$$

as unit of mass:

$$\sqrt{\frac{bc}{f}} = 5.56 \cdot 10^{-5} \text{ gr}$$

$$m_P = \sqrt{\hbar c / G} = 2.176 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

as unit of time:

$$\sqrt{\frac{bf}{c^5}} = 1.38 \cdot 10^{-43} \text{ sec}$$

$$t_P = l_P / c = 5.392 \times 10^{-44} \text{ s}$$

as unit of temperature:

$$a \sqrt{\frac{c^5}{bf}} = 3.50 \cdot 10^{32} \text{ °Cels}$$

$$T_P = m_P c^2 / k = 1.417 \times 10^{32} \text{ K}$$

**“These quantities preserve their natural meaning as long as the laws of gravitation, propagation of light in vacuum and both of the two laws of heat theory remain valid, that is, being measured by most various intelligent beings using most different methods, they must always give the same value.”**

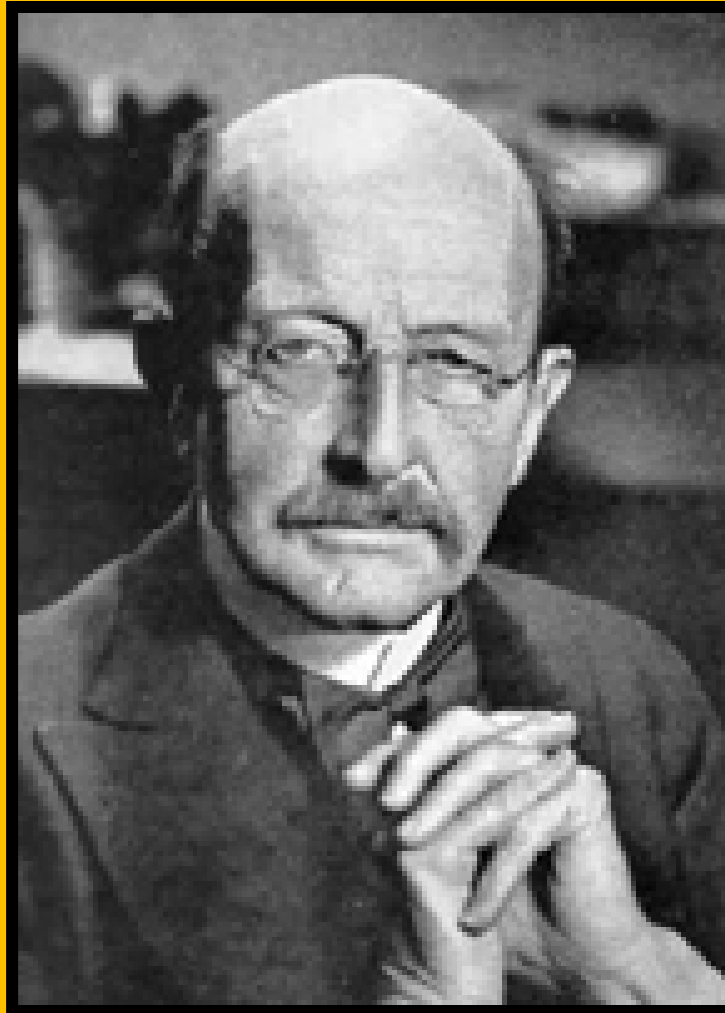


be measured only against the achievements of Johannes Kepler and Isaac Newton.”<sup>40</sup>

Einstein was disappointed by the lack of support from his colleagues at the academy (although he could hardly have expected their favor after *he* had rejected them by his preemptive resignation). With a touch of sour grapes, he wrote in a letter to Haber, “They were not able to disappoint me, because I never had respect or sympathy for them—with the exception of a few pure personalities (Planck 60 percent noble and Laue 100 percent).”<sup>41</sup> This was patently unfair to Planck, who had nobility to spare. As Lise Meitner later said in her sketch of Planck’s character, “He had an unusually pure disposition and inner rectitude, which corresponded to his outer simplicity and lack of pretension . . . Again and again I saw with admiration that he never did or avoided doing something that might have been useful or damaging to himself. When he perceived something to be right, he carried it out, without regard for his own person.”<sup>42</sup>

**An important heritage [ Lise Meitner on Planck’s personality. Quoted from Hans C. Ohanian, *Einstein’s Mistakes. The human failings of genius.* (W W Norton & Company, New York, 2008) ]**





**“Was mich in der Physik von jeher vor allem interessierte, waren die großen allgemeinen Gesetze, die für sämtliche Naturvorgänge Bedeutung besitzen, unabhängig von den Eigenschaften der an den Vorgängen beteiligten Körper.”**

# Appendices

## References.

Varró S, A foton 100 éve. I. Kezdő lépések és néhány fejlemény. In „A kvantumoptika és kvantum elektronika legújabb eredményei” Eds.: Zs. Heiner and K. Osvay, pp. 9-35 ( SZTE, Szeged, 2006 ): A VII. Kvantumelektronika Iskola (2005. Május 31 – július 3., Balatonfüred) .

Varró S : Einstein’s fluctuation formula. A historical overview.  
Fluctuation and Noise Letters, **6** , No.2, R11-R46 (2006), [http:// arxiv.org](http://arxiv.org) : quant-ph/0611023

Varró S : A study on black-body radiation: classical and binary photons.  
Acta Physica Hungarica B: Quantum Electronics **26**, Nos. 3-4., 365-389 (2006)  
<http://arxiv.org> : quant-ph/0611010

Varró S : Irreducible decomposition of Gaussian distributions and the spectrum of black-body radiation.  
Physica Scripta, **75**, 160-169 (2007) , <http://arxiv.org> : quant-ph/0610184

Varró S : Correlations in single-photon experiments.  
Fortschritte der Physik, **56**, No. 1, 91-102 (2008), <http://arxiv.org> : arXiv: 0707.1305v1 [quant-ph]

Varró S; The role of self-coherence in correlations of bosons and fermions in linear counting experiments.  
Notes on the wave-particle duality;  
Fortschritte der Physik – Progr. Phys.; **59**, No. 3–4, 296-324 (2011). E-print: arXiv: 1004.2975 [quant-ph];

Varró S, The digital randomness of black-body radiation.  
*Journal of Physics Conference Series* **414**, 012041 (2013). doi:10.1088/1742-6596/414/1/012041  
E-print: arXiv 1301.1997 [quant-ph]

# 'PLANCK 2008' at the Hung. Acad. of Sci.

**A FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA ÉS AZ  
EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT  
EGYÜTTES TUDOMÁNYOS ÜLÉSE**



**május 14. (szerda) 10 óra**

**PLANCK 2008. Emlékezés Max Planck születésének 150. évfordulója alkalmából**

Az ülést megnyitja és bevezetőt mond:

Introduction: *Kroó Norbert, az MTA rendes tagja, az MTA alelnöke*

A kvantumelmélet kialakulása Planck-tól Dirac-ig [The genesis of quantum theory from Planck to Dirac] **Nagy Károly, az MTA rendes tagja**

A kozmikus háttérsugárzás kutatásának története és kilátásai [History and perspectives of the research on cosmic microwave background radiation]

**Király Péter, tudományos munkatárs**

Entrópia, Planck, Univerzum [Entropy, Planck, Universe]

**Patkós András, az MTA rendes tagja**

Max Planck kétségei [The doubts of Max Planck]

**Károlyházy Frigyes, a fizikai tudomány doktora**

Planck és a speciális relativitáselmélet [Planck and the special relativity theory]

**Varró Sándor, az MTA doktora**

A kvantummechanika kiteljesedése: a kvantum szóráselmélet megszületése [The birth of the quantum scattering theory]

**Bencze Gyula, a fizikai tudomány doktora**

Kvantum és klasszikus határán [At the border of classical and quantum]

**Geszti Tamás, a fizikai tudomány doktora**

Zárszó: Closing: *Horváth Zalán, az MTA rendes tagja, osztályelnök*

Az ülés helye: Magyar Tudományos Akadémia, Nagyterem (Budapest V., Roosevelt tér 9. II. em.)

[Varró S, The forgotten heritage of Maxx Planck](#)

# Max-Planck-Ausstellung im Physikzentrum der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. [ M Bonitz ]



50 Jahre  
Naturwissenschaftliches Fakultät

Kiel nano  
and surface  
sciences

## Max-Planck-Ausstellung im Physikzentrum der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel



Max Planck

Als Professor für Theoretische Physik an der CAU  
Kiel: (1885-89)

As professor of theoretical physics at the University of Kiel  
(1885-89)



Vor dem Max-Planck-Hörsaal (LS13/R8)

### Plancks Beziehung zu Kiel

„...betrachte ich doch Kiel als meine eigentliche  
Heimat und fühle mich auch heute noch als Schleswig-  
Holsteiner.“

Max Planck, 1920, anlässlich der Nobelpreis-Verleihung  
(Lebenslauf)

### Planck's relationship to Kiel

*"I regard Kiel as my real home and even today I still  
feel like a true 'Schleswig-Holsteiner'."*

Max Planck, on the occasion of the Nobel Prize Award ceremony  
(1920)

zwischen den Hörsälen



Was ist Licht? What is light?

Röntgenstrahlung: Der Mensch wird durchsichtig  
X Rays: Humans become transparent

Plancks Entdeckung  
Planck's discovery

Die Geburt der Quantentheorie  
The birth of quantum theory

Exhibition compiled and organized by Prof. Dr. M. Bonitz at the Kiel University.



# Planck on plasma partition function

## Max Planck and Albrecht Unsöld on plasma partition functions and lowering of ionization energy

W. Ebeling\*

Institut für Physik, Humboldt-Universität Berlin,  
Berlin, Germany

**\*Correspondence**

W. Ebeling, Institut für Physik,  
Humboldt-Universität Berlin, Newtonstr. 15,  
12489 Berlin, Germany.  
Email: werner\_ebeling@web.de

We summarize the work devoted to plasma thermodynamics and ionization theory performed by two protagonists working at Kiel University: Max Planck and Albrecht Unsöld. First we show that Planck developed, in Kiel, the basis for describing the chemical equilibria between charged particles (ions) and formulated later, in Berlin, the first complete version of the theory of ionization equilibria in plasmas with a convergent partition function. Albrecht Unsöld studied, in Kiel, the influence of plasma density on the atomic partition function, investigating the electric microfield between the ions. He showed that this effect leads to a lowering of the ionization energy going with the cubic root of the density. Finally, we discuss briefly recent theoretical and experimental work on the ionization potential depression.

**KEYWORDS**

Albrecht Unsöld, ionization theory, Kiel University, Max Planck, plasma thermodynamics

Ebeling W, *Contributions to Plasma Physics* 2017; 57:441–451. [ M. Planck, *Ann. Phys.* 1898, 34, 139. , M. Planck, *Annalen der Physik* 1924, 75, 673. ]



# Planck on electron diffusion

## EMERGENT BEHAVIOUR IN ELECTRODIFFUSION: PLANCK'S OTHER QUANTA

L. BASS and A. J. BRACKEN

Department of Mathematics, School of Mathematics and Physics  
The University of Queensland, Brisbane 4072, Australia  
(e-mails: lb@maths.uq.edu.au, a.bracken@uq.edu.au)

*(Received July 9, 2013 – Revised August 20, 2013)*

A well-established nonlinear continuum model of time-independent electrodiffusion describes the migrational and diffusional transport of two ionic species, with equal and opposite valences, across a liquid junction. The ionic charge densities provide the source for a static electric field, which in turn feeds back on the charges to contribute the migrational component of the ionic transport. Underpinning the model is a form of the second Painlevé ordinary differential equation (PII). When Bäcklund transformations, extended from those known in the context of PII, are applied to an exact solution of the model first found by Planck, a sequence of exact solutions emerges. These are characterized by corresponding ionic flux and current densities that are found to be quantized in a particularly simple way. It is argued here that this flux quantization reflects the underlying quantization of charge at the ionic level: the nonlinear continuum model 'remembers' its discrete roots, leading to this emergent phenomenon.

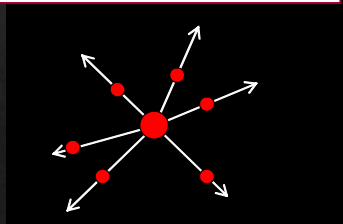
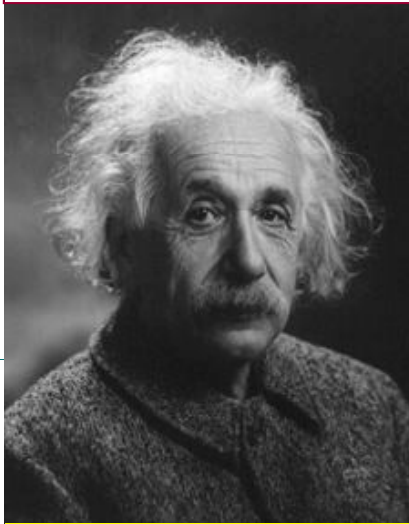
**Keywords:** emergent behaviour, nonlinear electrodiffusion, Bäcklund transformations, flux quantization, Painlevé II equation.

L. BASS and A. J. BRACKEN, *REPORTS ON MATHEMATICAL PHYSICS* Vol. 73 (2014) pp 65-75.  
[W. Nernst: *Z. Phys. Chem.* 2 (1888), 613., M. Planck: *Ann. Phys. Chem.* 39 (1890), 161.]

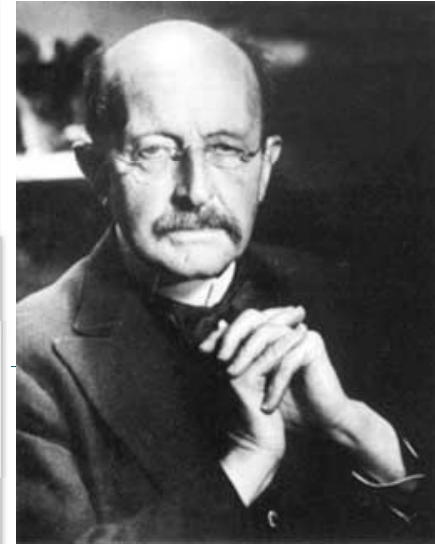
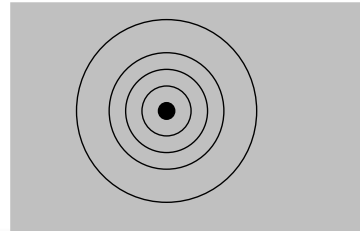
# **Planck and the 'wave-particle duality'**



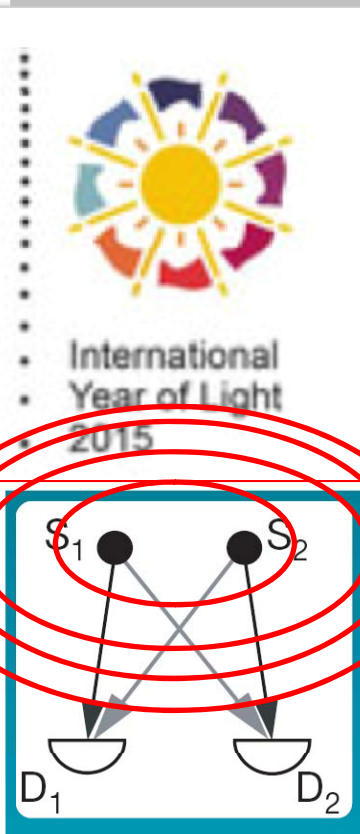
6. Über einen  
die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes  
betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;  
von A. Einstein.



What would PLANCK and EINSTEIN  
say on the logo of the 'International  
Year of Light 2015'?

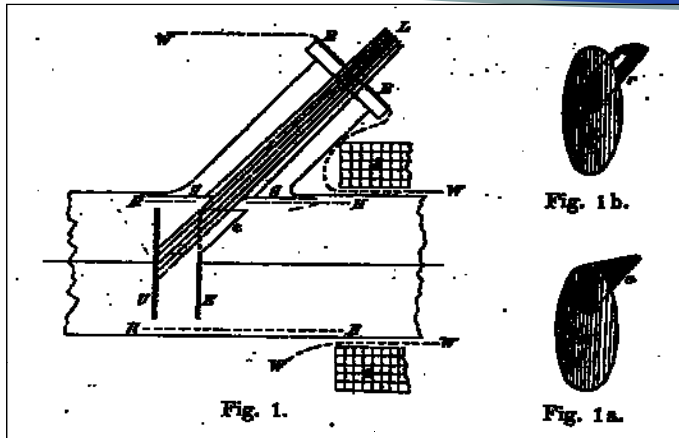


“...by spreading from a point in the  
outgoing light rays the energy is  
not distributed continuously to  
larger and larger spatial regions,  
but these rays consist of a finite  
number of **energy quanta localized  
in spatial points** ...” [Einstein A, On a  
heuristic viewpoint concerning the  
production and transformation of light.  
*Annalen der Physik* (4) 17, 132-148 (1905)]



„The wavefront is  
not spotty.” [“Die  
Wellenfront ist  
nicht fleckig.”]  
[Planck M, Das  
Wesen des  
Lichts. *Natur-  
wissenschaften* 7,  
903-909 (1919)]

Einstein's 'heuristic viewpoint' on light quanta (1905). Interpretation of Lenard's experimental results on the photoelectric effect (1902).



„...The usual notion that the energy of light would be distributed continuously in the illuminated space where it propagates finds particularly great difficulties by the attempt to explain the photoelectric phenomena, as has been shown in a path-breaking work of Mr. Lenard.<sup>1)</sup>” [Footnote: „<sup>1)</sup> P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 169 u. 170. 1902.”].

“...The simplest way to imagine this, that one light quantum gives its whole energy to a single electron;...Our interpretation, as far as I see, is not in contradiction of the properties of the photoelectric effect observed by Mr. Lenard. When each energy quantum of the exciting light gives its energy to the electrons independently from the others,....,the number of the electrons leaving the body, under otherwise the same circumstances, will be proportional with the intensity. <sup>1)</sup> ”

$$h\nu - A = \frac{1}{2}mv^2$$

Einstein A, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Ann. der Phys.* 17 , 132-148 (1905). [Nobel Prize 1922]  
Lenard P, Ueber die lichtelektrische Wirkung. *Ann. der Phys.* 8 , 149-198 (1902). [Nobel Prize 1905]

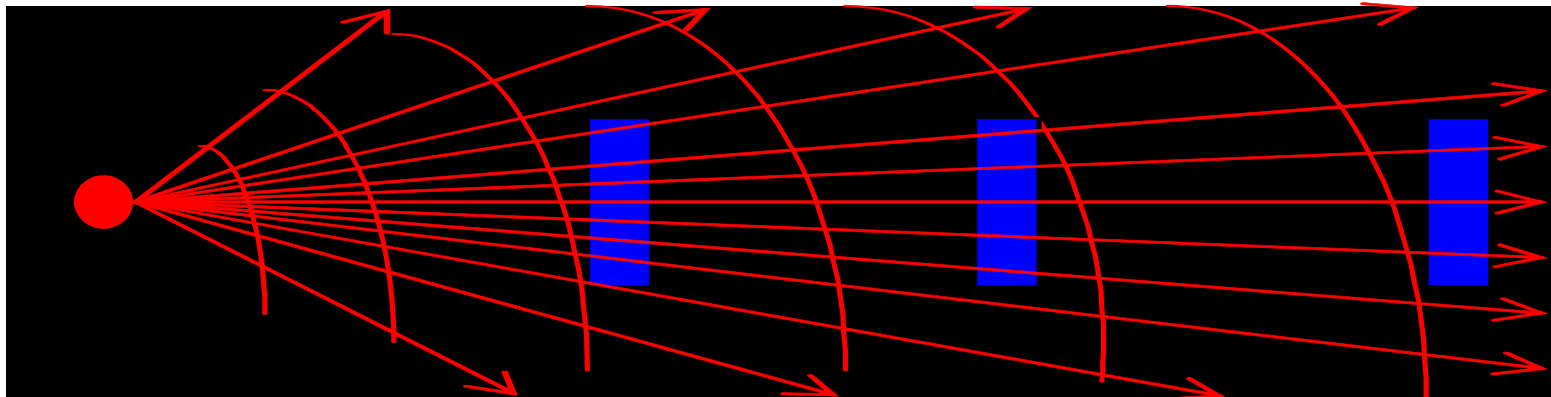
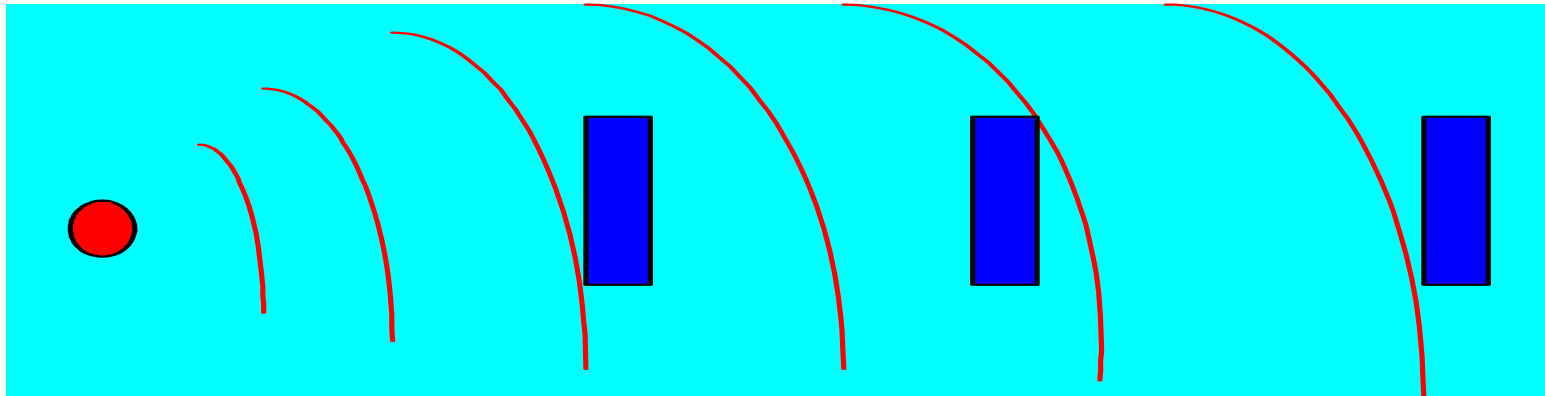
# Spatio-temporal localization versus Huygens principle. I.

„Was aber der *Huygensschen* Wellentheorie eine scheinbar unüberwindliche Schwierigkeit bereitet, ist die von *Philipp Lenard* u. a. festgestellte Tatsache, daß die Elektronengeschwindigkeit nicht etwa von der *Intensität* der Strahlung, sondern nur von der Wellenlänge derselben, also von der *Farbe* des verwendeten Lichtes abhängt, ... .Rückt man also das Metall immer größere Entfernung von der Lichtquelle, ..., so fliegen trotz der schwächeren Beleuchtung die Elektronen doch immer mit der nämlichen Geschwindigkeit heraus; ...

...woher nimmt ein herausfliegendes Elektron seine Bewegungsenergie, wenn schließlich die Entfernung von der Lichtquelle so groß wird, daß die Lichtintensität fast ganz verschwindet, während doch die Elektronen keine Spur einer Verminderung ihrer Geschwindigkeit zeigen? Es müßte sich hier offenbar handeln um eine Art Anhäufung der Lichtenergie auf die Stellen, wo die Elektronen abgeschleudert werden – eine Anhäufung, die der allseitigen gleichmäßigen Ausbreitung der elektromagnetischen Energie nach der *Huygensschen* Wellentheorie gänzlich fremd ist.“

Planck M, Das Wesen des Lichts. Vortrag gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm Gesellschaft am 28. 10. 1919. [Naturw. 7, S. 903-909 , 1919; Berlin, Springer, 1920.]

# Spatio-temporal localization versus Huygens principle. II.



Planck M, Das Wesen des Lichts. Vortrag gehalten in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm Gesellschaft am 28. 10. 1919. [Naturw. 7, S. 903-909 , 1919; Berlin, Springer, 1920.]

## **Works by Planck concerning the relativity**

- **The foundation of the relativistic dynamics. [ Appendix]**
- **The exact derivation of the velocity-dependent mass-increase. The detailed comparison with the experiments by Kaufmann. [Appendix]**
- **The relativistic generalization of the Principle of Least Action due to Helmholtz.**
- **The foundation of the relativistic thermodynamics (within this; the determination of the transformation rules of the black-body radiation).**
- **The general derivation of the “  $E=mc^2$  ” relation**

**Planck's conclusion on the experimental results by Kaufmann on mass-increase (1907). [ The really conclusive experiments were performed by much later Zahn and Spees. ]**

**Planck: "Nachtrag zu der Besprechung der Kaufmannschen Ablenkungsmessungen"**

**Even in the light of the newest experiments, it cannot be decided between the validity of the models by Lorentz and Einstein and of that of Abraham.**

**Günther Neumann (1914) Not conclusive !**

**C. T. Zahn & A. H. Spees (1938-): "In view of the fundamental importance of such experiments it seems that much is left to be desired"**

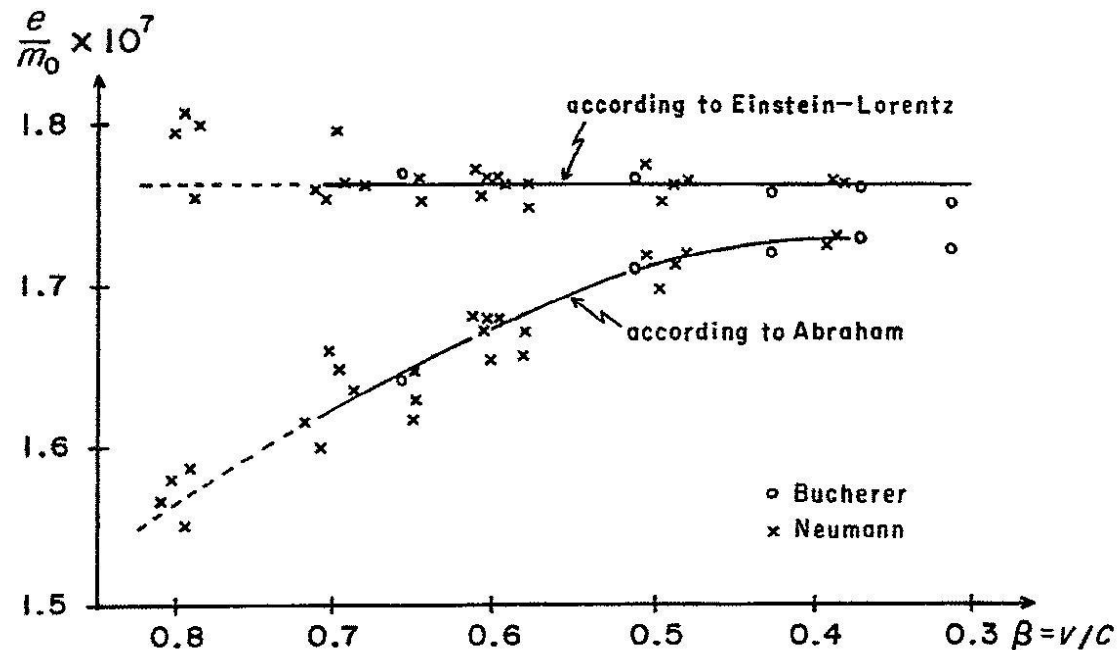


FIGURE 15.8 Conclusive evidence in favor of special relativity

# Building up the relativistic dynamics

**Planck: Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik (1906. March)**

**Relativistic equation of motion:**

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right\} = F = eE + \frac{e}{c} v \times B$$

**Lagrange function:**

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

**Canonical momentum:**

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

**Hamilton principle:**

$$\int_{t_1}^{t_2} dt (\delta L + F \cdot \delta r) = 0$$

**Pauli (1921): ~In fact, Planck derived the Lorentz force from special relativity. Only in the Planck expression comes out that the time derivative of the momentum is the force, hence the the momentum of a closed system is a constant.**