A Wigner–Eckart-tétel

Tétel (*Wigner Jenő, Carl Eckart*, 1930): Legyen $|jm\rangle$ a forgáscsoport j-edik irrepjének m-edik sorához, $|j'm'\rangle$ pedig a j'-edik irrep m'-edik sorához tartozó vektor, továbbá legyen T^J_M a forgáscsoport J-edik irrepjének M-edik sorához tartozó irreducibilis tenzoroperátor. A $\langle j'm'|\, T^J_M \,|jm\rangle$ mátrixelemre a következő összefüggés érvényes:

$$\langle j'm'|\, T^J_M \,|jm\rangle = \langle j'm'(Jj)Mm\rangle \, \langle j'\|\, T^J \,\|j\rangle \ , \tag{1}$$

ahol $\langle j'm'(Jj)Mm\rangle$ egy Clebsch–Gordan-együttható (melynek definícióját alább felidézzük), $\langle j'\|\, T^J \,\|j\rangle$ pedig egy *redukált* vagy *kétvonalas* mátrixelemnek nevezett konstans, amely nem függ az m, m' és M kvantumszámoktól.

A Clebsch–Gordan-együtthatók tulajdonságaiból *kiválasztási szabályok* adódnak a szóbanforgó mátrixelemre: $\langle j'm'|\, T^J_M \,|jm\rangle$ csak akkor lehet nemzérus, ha

(i) $|j-J| \leq j' \leq j+J$,

(ii) $m' = m + M$.

Továbbá két ilyen szerkezetű mátrixelem hányadosában a redukált mátrixelem kiesik, tehát a hányados független a rendszer fizikai tulajdonságaitól:

$$\frac{\langle j'm'|\, T^J_M \,|jm\rangle}{\langle j'n'|\, T^J_N \,|jn\rangle} = \frac{\langle j'm'(Jj)Mm\rangle}{\langle j'n'(Jj)Nn\rangle} \ . \tag{2}$$

Először számbavesszük a bizonyításhoz felhasznált összefüggéseket. Az irrepekhez tartozó vektorok és operátorok transzformációs tulajdonságai az R forgatás hatására:

$$R\,|jm\rangle = \sum_{n=-j}^{j} D^{(j)}(R)_{nm}\,|jn\rangle \ , \tag{3}$$

$$RT^J_M R^{-1} = \sum_{N=-J}^{J} D^{(J)}(R)_{NM} T^J_N \ . \tag{4}$$

Felhasználjuk továbbá a direktszorzat-ábrázolások redukcióját a forgáscsoport irrepjeire:

$$UD^{(j\times j')}(R)U^{-1} = \bigoplus_{J=|j-j'|}^{j+j'} D^{(J)}(R) \ , \tag{5}$$

ahol az U unitér transzformációval térünk át a direktszorzat-bázisról az irreducibilis bázisra; U elemei a $\langle JM(jj')mm'\rangle$ Clebsch–Gordan-együtthatók. Ezekkel a bázis-transzformáció a következőképpen írható:

$$|jm\rangle \otimes |j'm'\rangle = \sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} \sum_{M=-J}^{J} |JM\rangle \langle JM(jj')mm'\rangle \ . \tag{6}$$

Ennek segítségével felírhatjuk az (5) baloldalán álló direktszorzat-mátrix $D^{(j\times j')}(R)_{nn';mm'} = D^{(j)}(R)_{nm}D^{(j')}(R)_{n'm'}$ elemét a jobboldalon álló direktösszeg-mátrix elemeivel:

$$D^{(j)}(R)_{nm}D^{(j')}(R)_{n'm'} = \sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} \sum_{N=-J}^{J} \sum_{M=-J}^{J} \langle nn'(jj')JN\rangle \, D^{(J)}(R)_{NM} \, \langle JM(jj')mm'\rangle \tag{7}$$

Itt kihasználtuk az (5) jobboldalán álló mátrix blokkdiagonális (J-ben diagonális) voltát. Végezetül felhasználjuk az ortogonalitási főtételt:

$$\int D^{(j)}(R)_{mn}D^{(j')}(R)_{m'n'} \, dR = \frac{1}{l_j}\delta_{jj'}\delta_{mm'}\delta_{nn'} \int dR \, , \tag{8}$$

ahol $l_j = 2j+1$ az ábrázolás dimenziója.

A fentieket előrebocsátva rátérünk a tétel bizonyítására. A mátrixelemet a következőképpen alakítjuk át:

$$\langle j'm'| \, T^J_M \, |jm\rangle = \langle j'm'| \, R^{-1}RT^J_M R^{-1}R \, |jm\rangle \ . \tag{9}$$

A jobboldalon a transzformált mennyiségeket felírjuk (3) és (4) segítségével:

$$\langle j'm'| \, T^J_M \, |jm\rangle = \sum_{N,n,n'} D^{(j')}(R)^*_{n'm'}D^{(J)}(R)_{NM}D^{(j)}(R)_{nm} \, \langle j'n'| \, T^J_N \, |jn\rangle \tag{10}$$

Következő lépésként az összegben szereplő $D^{(J)}(R)_{NM}D^{(j)}(R)_{nm}$ szorzatot átalakítjuk (7) felhasználásával:

$$\langle j'm'| \, T^J_M \, |jm\rangle = \sum_{N,n,n'} \sum_{L,l,k} \langle Nn(Jj)Ll\rangle \, D^{(j')}(R)^*_{n'm'}D^{(L)}(R)_{lk} \, \langle Lk(Jj)Mm\rangle \, \langle j'n'| \, T^J_N \, |jn\rangle \ . \tag{11}$$

Integrálunk a csoportra, felhasználjuk a (8) ortogonalitási összefüggést és osztunk $\int dR$-rel:

$$\langle j'm'|\, T^J_M\, |jm\rangle = \sum_{N,n,n'} \sum_{L,l,k} \langle Nn(Jj)Ll\rangle\, \frac{1}{2j'+1} \delta_{j'L}\delta_{n'l}\delta_{m'k}\, \langle Lk(Jj)Mm\rangle\, \langle j'n'|\, T^J_N\, |jn\rangle \ . \tag{12}$$

Elvégezve az összegzést L-re, l-re és k-ra:

$$\langle j'm'|\, T^J_M\, |jm\rangle = \langle j'm'(Jj)Mm\rangle\, \frac{1}{2j'+1} \sum_{N,n,n'} \langle Nn(Jj)j'n'\rangle\, \langle j'n'|\, T^J_N\, |jn\rangle \ . \tag{13}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk és megkaptuk a redukált mátrixelem explicit alakját:

$$\langle j'\|\, T^J\, \|j\rangle = \frac{1}{2j'+1} \sum_{N,n,n'} \langle Nn(Jj)j'n'\rangle\, \langle j'n'|\, T^J_N\, |jn\rangle \ . \tag{14}$$