(1)

BCS alapállapot — John Bardeen, Leon Cooper, Robert Schrieffer, 1955

Cooper-pár másodkvantált formalizmusban

$$|\Psi_2\rangle = \sum_{\substack{k>k_F \\ \sigma}}' g_{\underline{k}}\, c^+_{\underline{k}\sigma} c^+_{-\underline{k}-\sigma} |F\rangle = \sum_{k>k_F}^{*} g_{\underline{k}}\, c^+_{\underline{k}\uparrow} c^+_{-\underline{k}\downarrow} |F\rangle$$

(pl. $k_z > 0$-ra)

Fermi-tenger

Nem csak a kiszemelt pár Cooper-pár, hanem az összes N elektron Cooper-párt alkot: N db $\underline{k}$ a B.Z. M db megengedett $\underline{k}$-ja közül

$$|\Psi_N\rangle = \sum g(\underline{k}_{i_1}, \dots, \underline{k}_{i_{N/2}})\, c^+_{\underline{k}_{i_1}\uparrow} c^+_{\underline{k}_{i_1}\downarrow} \cdots c^+_{\underline{k}_{i_{N/2}}\uparrow} c^+_{\underline{k}_{i_{N/2}}\downarrow} |0\rangle$$

vákuum

Reménytelenül bonyolult. $\binom{M}{N}$ db N-változós fv.-t kéne megadni $\sim 10^{(10^{23})}$, 10^{23}

BCS Ansatz:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\underline{k} \in B.Z.} \left(u_{\underline{k}} + v_{\underline{k}}\, c^+_{\underline{k}\uparrow} c^+_{-\underline{k}\downarrow}\right)|0\rangle$$

~~Átlagtér: adott kiszemelt pár betöltése független a többi pár betöltésétől~~

$E = \langle\Psi_G| H |\Psi_G\rangle$ az $u_{\underline{k}}$ és $v_{\underline{k}}$ függvények funkcionálja.

Variációszámítással meghatározzuk E minimumát $\rightsquigarrow$ alapállapot.

Mellékfeltételek: $|u_{\underline{k}}|^2 + |v_{\underline{k}}|^2 = 1$, részecskeszám adott (???)

$u_{\underline{k}}$ és $v_{\underline{k}}$ jelentése? $P(\underline{k}\uparrow, -\underline{k}\downarrow$ betöltött$) = |v_{\underline{k}}|^2$

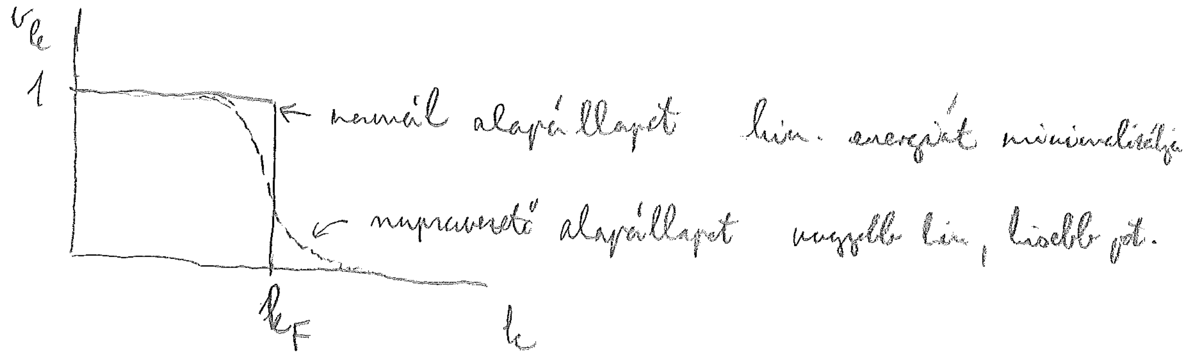
Tulajdonságok:
- elektronpárok szuperpozíciója
- elektronpárok "koherensek" (később fogjuk)

Ablan reménykedünk, hogy ez az Ansatz megragadja az alapállapot legfontosabb tulajdonságait.

Megjegyzés: Normál alapállapot is ilyen alakú

$$v_k = \Theta(k_F - k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k < k_F \\ 0, & \text{ha } k > k_F \end{cases}$$

$$u_k = 1 - v_k^2 = \Theta(k - k_F)$$



Fontos tulajdonság: részecskeszám nem meghatározott

$$|\Psi_G\rangle = \underbrace{u_1 \ldots u_M |0\rangle}_{0 \text{ elektron}} + \underbrace{u_1 \ldots u_{M-1} v_M c^\dagger_{k_M\uparrow} c^\dagger_{-k_M\downarrow} + \ldots}_{2 \text{ elektron}}$$

$$+ \underbrace{u_1 \ldots u_{M-2} v_{M-1} v_M c^\dagger_{k_{M-1}\uparrow} c^\dagger_{-k_{M-1}\downarrow} c^\dagger_{k_M\uparrow} c^\dagger_{-k_M\downarrow} + \ldots}_{4 \text{ elektron}}$$

$$+ v_1 \ldots v_M \underbrace{c^\dagger_{k_1\uparrow} c^\dagger_{-k_1\downarrow} \ldots c^\dagger_{k_M\uparrow} c^\dagger_{-k_M\downarrow}}_{2M \text{ elektron}}$$

$$|\Psi_G\rangle = \sum_{N=0,2,\ldots} \lambda_N |\Psi_N\rangle$$

Milyen a λ_N eloszlás?

Mi a $k_\uparrow$ állapot betöltöttsége? $\langle A\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|A^\dagger\varphi\rangle$

$$\langle\psi_G|n_{k\uparrow}|\psi_G\rangle = \langle\psi_G|c^\dagger_{k\uparrow}c_{k\uparrow}|\psi_G\rangle$$

$$= \langle 0|\left[\prod_{\underline{l}}(u^*_{\underline{l}} + v^*_{\underline{l}}c_{-\underline{l}\downarrow}c_{\underline{l}\uparrow})\right]c^\dagger_{k\uparrow}c_k\left[\prod_{\underline{l}}(u_{\underline{l}} + v_{\underline{l}}c^\dagger_{\underline{l}\uparrow}c^\dagger_{-\underline{l}\downarrow})\right]|0\rangle$$

A tényezők sorrendje nem számít $\underline{k}\neq\underline{l} \rightsquigarrow \{c_k, c_l\}=0$ és páros sz. c ∀ tényezőben

$$= \langle 0|\,(u^*_k + v^*_k c_{-k\downarrow}c_{k\uparrow})c^\dagger_{k\uparrow}c_{k\uparrow}(u_k + v_k c^\dagger_{k\uparrow}c^\dagger_{-k\downarrow})\;\times$$

$$\times\prod_{\underline{l}\neq\underline{k}}(u^*_l + v^*_l c_{-\underline{l}\downarrow}c_{\underline{l}\uparrow})(u_l + v_l c^\dagger_{\underline{l}\uparrow}c^\dagger_{-\underline{l}\downarrow})|0\rangle$$

Szorzat op. várható értéke: ~~várható~~ tényezők várható értékének szorzata

$|0\rangle = |0_{k_1}\rangle|0_{k_2}\rangle\ldots$! $c^\dagger_{\underline{l}}$ csak $|0_{\underline{l}}\rangle$-ra hat

~~Egy tényező a~~ Egy tényező $\prod_{\underline{l}\neq\underline{k}}$-ből:

$$\langle 0_l|(u^*_l u_l + u^*_l v_l c^\dagger_{\underline{l}\uparrow}c^\dagger_{-\underline{l}\downarrow} + v^*_l u_l c_{-l\downarrow}c_{l\uparrow} + v^*_l v_l c_{-l\downarrow}c_{l\uparrow}c^\dagger c^\dagger|0\rangle$$

1. tag $\langle 0|\,|u_l|^2|0\rangle = |u_l|^2$

2. tag $\langle 0|c^\dagger_{l\uparrow}c_{-l\downarrow}|0\rangle = 0$, mert $c_{-l\downarrow}|0\rangle = 0$

3. tag $=0$

4. tag $|v_l|^2$

$$|u_l|^2 + |v_l|^2 = 1$$

Egy tényező csak a $(-\underline{l}, \underline{l})$ altérre hat

$|0\rangle = |0\rangle_{k_1}\otimes|0\rangle_{k_2}\otimes\ldots$
$\pm k_1$ altér

$\langle 0|(\ldots k_1\ldots)(\ldots k_2\ldots)|0\rangle =$

$= {}_{k_1}\langle 0|(\ldots k_1\ldots)|0\rangle_{k_1}\,{}_{k_2}\langle 0|(\ldots k_2\ldots)|0\rangle_{k_2}$

$\boxed{\text{átlagtér-elmélet}}$

A többi altér elektronjainak a hatását csak az (u_k, v_k) fv. befolyásolja. Ezért egyenként számolni oda.

k-n kényszer

1. tag $\langle 0| |u_k|^2 c^+_{k\uparrow} c_{k\downarrow} |0\rangle = 0$

2. tag $= 0$, mert ~~$c^+_{k\uparrow} c^+_{k\uparrow} |0\rangle = 0$~~ $\langle 0| c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow} |0\rangle = 0$

3. tag $= 0$

4. tag $|v_k|^2$

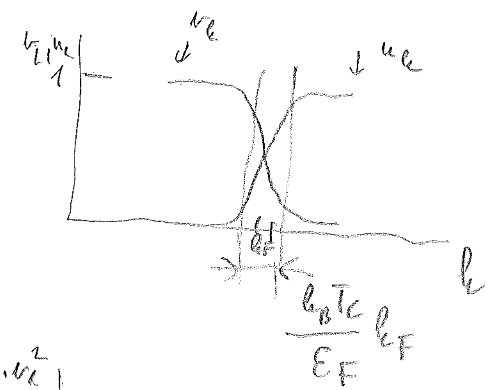
$|v_k|^2$ $\qquad \langle \Psi_G | n_{k\uparrow} | \Psi_G \rangle = \langle \Psi_G | n_{k\downarrow} | \Psi_G \rangle = |v_k|^2$

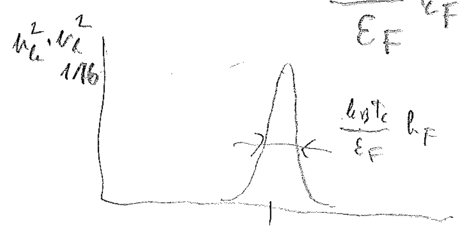
$$\langle N \rangle = \langle \Psi_G | \sum_k (n_{k\uparrow} + n_{-k\downarrow}) |0\rangle = 2 \sum_k |v_k|^2$$

szórás (hamarlikus)

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = 4 \sum_k u_k^2 v_k^2 \quad \text{(normál állapotban 0)}$$

BCS alapállapotban:





$$\frac{\Delta N}{N} \sim \frac{T_c / T_F}{N^{1/2}} \sim 10^{-13}$$

, ha $N \sim 10^{23}$

Mértékinvariancia sérülése BCS alapállapotban

Mértékinvariancia: H invariáns $c_k \to e^{i\vartheta} c_k$ trafóval szemben

H-ban H tagban ugyanannyi c^+, mint c (részecskeszám megmarad)

1-részecske op. c^+c
2-részecske op. c^+c^+cc $\Big\}\; e^{i\vartheta} e^{-i\vartheta} = 1$

Normál alapállapot:

$$\prod_{k,\sigma} c^+_{k\sigma} |0\rangle \to e^{iN\vartheta} \prod_{k\sigma} c^+_{k\sigma} |0\rangle$$

↑ mátrixelemből kiesik ~~energia~~

Szupra $u_k \neq 0$ $v_k \neq 0$

$$|\Psi_G(2\vartheta)\rangle = \prod \left(u_k + e^{i2\vartheta} v_k c^+_k c_{-k}\right)|0\rangle$$

Termodinamikai limitben

$\langle \Psi_G(\varphi) | \Psi_G(\varphi')\rangle = 0$ ortogonális állapotok

de energiában degeneráltak

Folytonos szimmetria spontán sérülése

N - ~~részecskés párt tartal~~ részecskék hoz $e^{i\frac{N}{2}\varphi}$ fázissal

mérsékelt $|\Psi_G(\varphi)\rangle$-ba

$$|\Psi_N\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-iN\varphi/2} |\Psi_G(\varphi)\rangle$$

$$\Delta N \cdot \Delta\varphi \gtrsim 1$$