Megoldás Bogoljubov-trafóval

Alkalmazható a gerjesztések leírására

$$\langle c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}\rangle = \cancel{2}\, u_k^* v_k = b_k \neq 0 \quad \text{komplex szám} \quad \text{"nemdiagonális rend"}$$

$$c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} = b_k + \underbrace{(c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} - b_k)}_{\text{"kicsi" eltérés az átlagtól}}$$

ilyenek négyzetét elhanyagoljuk a KH-i tagból H-ban.

$$\sum_{kk'} V_{kk'}\, c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}$$

$$(b+\Delta b)(b'+\Delta b') \approx bb' + b\Delta b' + b'\Delta b$$

$$\approx \sum_{kk'} V_{kk'}\left(c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} b_{k'} + b^*_k c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} - b^*_k b_{k'}\right)$$

Nyereség: eltűnt a kvadratikus tag.

H bilineáris a $c_k c_k^\dagger$-kben → lin (unitér) transzformációval diagonalizálható

V kiküszöbölése nem őrzi meg a részecskeszámot!

Def.: $$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} b_{k'} = -\sum_{k'} V_{kk'} \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}\rangle$$

$$H = \sum_{k\sigma} \xi_k c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} - \sum_k \left(\Delta_k c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} + \Delta^*_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} - \Delta_k b^*_k\right)$$

Transzformáció:

$$c_{k\uparrow} = u^*_k \gamma_{k0} + v_k \gamma^\dagger_{k1}$$ unitér trafó, ha

$$c^\dagger_{-k\downarrow} = -v^*_k \gamma_{k0} + u_k \gamma^\dagger_{k1}$$ $$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$$

Inverse

$$\gamma^\dagger_{k0} = u^*_k c^\dagger_{k\uparrow} - v^*_k c^{\cancel{\dagger}}_{-k\downarrow}$$ $\gamma^\dagger_{k0}$: (~~+~~ $\hbar k$ impulzus $+\frac{1}{2}$ S_z) ?

$$\gamma^\dagger_{k1} = v^*_k c_{k\uparrow} + u^*_k c^\dagger_{-k\downarrow}$$ $\gamma^\dagger_{k1}$: ~~+~~ $\hbar k$ impulzus ~~+~~$\frac{1}{2}$ S_z ?

$$\cancel{H = \sum_k \xi_k (|u_k|^2 - |v_k|^2)(\gamma_{k0}^+ \gamma_{k0}}$$

$$\{\gamma_{k0}^+, \gamma_{k0}\}_+ = |u_k|^2 \{c_{k\uparrow}^+, c_{k\uparrow}\}_+ + |v_k|^2 \{c_{-k\downarrow}^+, c_{-k\downarrow}\}_+ = 1$$ ~~Ab. [illegible]~~

$$\{\gamma_{ki}^+, \gamma_{k'j}\} = \delta_{kk'} \delta_{ij}$$ Fermion keltő operátorok.

$$H_{\mu N} = \sum_k \xi_k \Big[(|u_k|^2 - |v_k|^2)(\gamma_{k0}^+ \gamma_{k0} + \gamma_{k1}^+ \gamma_{k1}) + 2|v_k|^2 + 2u_k^* v_k^* \gamma_{k1} \gamma_{k0}$$

$$+ 2 u_k v_k \gamma_{k0}^+ \gamma_{k1}^+ \Big]$$

$$+ \sum_k [(\Delta_k \ldots$$ 3.43 képlet.

Diagonális, ha

$$2\xi_k u_k v_k + \Delta_k^* v_k^2 - \Delta_k u_k^2 = 0 \qquad \cancel{\frac{v_k}{u_k}} \ \times \frac{\Delta_k^*}{u_k^2}$$

$$2\xi_k \Delta_k^* \frac{v_k}{u_k} + (\Delta_k^*)^2 \frac{v_k^2}{u_k^2} - |\Delta_k|^2 = 0$$

$$\frac{\Delta_k^* v_k}{u_k} = \underbrace{(\xi_k^2 + |\Delta_k|^2)^{1/2}}_{E_k} - \xi_k \equiv E_k - \xi_k \qquad \left(\cancel{\frac{u_k}{v_k}} \text{ fázisa} \right)$$

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right)$$

$$H_{\mu N} = \underbrace{\sum_k (\xi_k - E_k + \Delta_k b_k^*)}_{\text{alapállapoti energia}} + \sum_k E_k (\gamma_{k0}^+ \gamma_{k0} + \gamma_{k1}^+ \gamma_{k1})$$

$\langle \gamma_{k0}^+ \gamma_{k0} \rangle = 0 \quad \forall k$-ra

Gerjesztések (2-féle) $\quad E_k = \sqrt{|\Delta_k|^2 + \xi_k^2}$ valós $\Leftrightarrow \dfrac{\Delta_k^* v_k}{u_k}$ valós

$\rightsquigarrow \Delta_k$ fázisa $= \dfrac{v_k}{u_k}$ fázisa

$\Delta_k = ?$

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle = -\sum_{k'} V_{kk'} u_{k'}^* v_{k'} \Big(1 - \underbrace{\langle \gamma_{k'0}^+ \gamma_{k'0} \rangle - \langle \gamma_{k'1}^+ \gamma_{k'1} \rangle}_{=0 \text{ alapállapotban}}\Big)$$

$\rightsquigarrow$ ugyanaz a gap-egyenlet, mint az előző órán

Bizonyítsuk be, hogy az alapállapot a BCS alapállapot!

Ehhez elég megmutatni, hogy $\forall$ k-ra

$$\gamma_{k0} |\Psi_G\rangle = 0$$

$$\gamma_{k1} |\Psi_G\rangle = 0$$

$$\gamma_{k0} |\Psi_G\rangle = (\tilde{u}_k c_{k\uparrow} - \tilde{v}_k c_{-k\downarrow}^+) \prod_l (u_l + v_l c_{l\uparrow}^+ c_{-l\downarrow}^+) |0\rangle$$

$l=k$ tényező: $\Big[\underbrace{u_k \tilde{u}_k c_{k\uparrow}}_{0} + \underbrace{\tilde{u}_k v_k \underbrace{c_{k\uparrow} c_{k\uparrow}^+}_{\times 1} c_{-k\downarrow}^+ - \tilde{v}_k u_k c_{-k\downarrow}^+}_{=0} \underbrace{- \tilde{v}_k v_k c_{-k\downarrow}^+ c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+}_{0}\Big] |0\rangle$

$\rightsquigarrow$ $\forall_k$ $\gamma_{k0} |\Psi_G\rangle = 0$ (~~hasonlóan megy $\gamma_{k1} |\Psi_G\rangle = 0$~~ !)

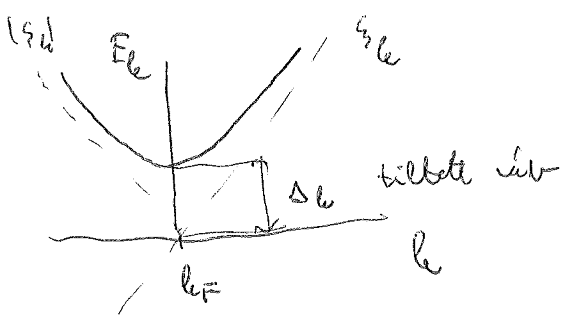
$\Leftrightarrow$ $\tilde{u}_k v_k = u_k \tilde{v}_k$ $\forall$ k-ra

Véges hőmérsékletek

$$H - \mu \hat{N} = \Delta E + \sum_{k} E_{k} \left(\gamma^{\dagger}_{k0} \gamma_{k0} + \gamma^{\dagger}_{k1} \gamma_{k1} \right)$$

kondenzációs energia $= -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2$

$$E_{k} = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2} \qquad \xi_k = \epsilon_k - \mu$$



Δ_k -t definiáló önkonzisztencia egyenlet:

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{kk'} \langle c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow} \rangle = \sum_{k'}$$