Microscopic theory of SC

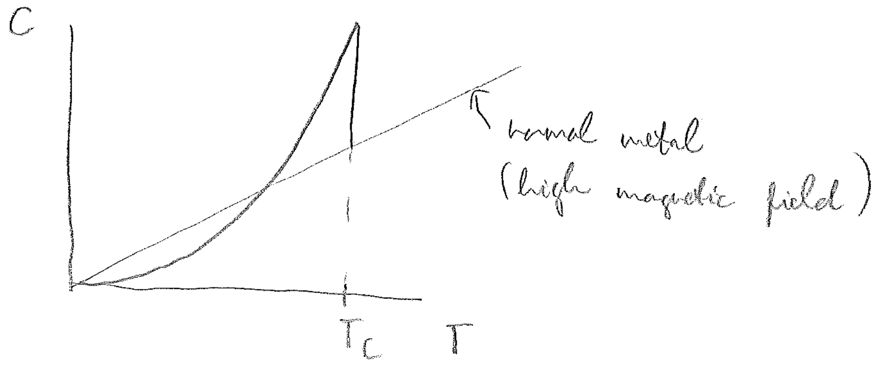
J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. Robert Schrieffer, Phys. Rev. 106, 162 (1957)
108, 1175 (1957).

Starting points:

1.) Gap in the electron excitation spectrum of superconductors

2.) Isotope effect

1.) electron specific heat of superconductors



$T \ll T_c \rightsquigarrow C \propto e^{-\Delta/T} \rightsquigarrow \Delta \sim T_c$ gap in the spectrum

2.) T_c's of different isotopes of the same material vary as

$$T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}} \propto \omega_0 \quad \text{phonon frequency} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Importance of electron phonon coupling

3.)

②

☆ Cooper-probléma

~~[illegible]~~ Cooper-párok: kötött párok fermionok rendszerében

⤳ energia gap a fermionok rendszerében (optikai kísérletekkel mérhető)

☆ Lehetséges motiváció: GL elmélet: makroszkopikus hullámfv.,

Analógia a He-kondenzációval e-e pár: Bose részecske

Cooper, 1956

Adott N db nem kölcsönható elektron, m tömegű $s = 1/2$ spinű

↑ "Fermi-tenger"

Hozzáadunk még 2 db részecskét amelyek között van egy $V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$ potenciállal leírható kölcsönhatás

+ 2 kölcsönható elektron

Pár hullámfv.-e:

$$\phi(\underline{r}_1, \underline{r}_2; \alpha, \beta) = \underbrace{e^{\frac{1}{2}\underline{P}\cdot(\underline{r}_1 + \underline{r}_2)}}_{\text{TKP mozgása}} \underbrace{\psi(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}_{\text{relatív mozgás}} \underbrace{\chi(\alpha, \beta)}_{\text{spinkomponens indexe (mivel spin-párja h.h.)}}$$

$$\psi(\underline{r}) = \sum_{\underline{k}} \psi_{\underline{k}} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\underline{k}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} \psi_{\underline{k}}$$

$$V_{\underline{k}} = \int d^3 r\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} V(\underline{r})$$

Legalacsonyabb energiájú állapotot keressük ⤳ $\underline{P} = 0$

~~$\psi(\underline{r}$~~ $$H = \frac{1}{2m}\left[(-i\hbar\nabla_1)^2 + (-i\hbar\nabla_2)^2\right] + V$$

Schrödinger-egyenlet: $$2\epsilon_k \psi_k + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k' > k_F} d^3k'\, V_{\underline{k}-\underline{k}'} \psi_{k'} = E\psi_{\underline{k}} \qquad k > k_F$$

$$(2\epsilon_{\underline{k}} - E)\psi_k = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k' > k_F} d^3k'\, V_{\underline{k}-\underline{k}'}\psi_{k'}$$

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$$

$k < k_F$ állapotokat kizárjuk a Pauli-elv miatt

~~Kifejtjük V_k~~

$V_{\underline{k}-\underline{k}'}$ csak $|\underline{k}|, |\underline{k}'|$ -től és a $(\underline{k},\underline{k}')\sphericalangle$ -től függ

$$V_{\underline{k}-\underline{k}'} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, V_l(kk')\, P_l\underbrace{(\hat{\underline{k}}\cdot\hat{\underline{k}}')}_{\cos(\underline{k},\underline{k}')\sphericalangle}$$

$$\Psi_{\underline{k}} = \sum_{l,m} a_{lm}\, \Psi_l(k)\, Y_{lm}(\underline{k}')$$

Cooper eredeti cikkében: csak $l=0$ tagot feltételez

$$V_{\underline{k}-\underline{k}'} = V_0(k,k')$$

$\Psi_{\underline{k}} = \Psi_k$ — legalacsonyabb energiájú állapot $l=0$ pályamomentumú

Bloch-tétel

Általános potenciálra még mindig nem tudjuk megoldani.

További feltételezés a $V(k,k')$ potenciálra:

$$V(k,k') = \begin{cases} -V<0, & \text{ha } \varepsilon_F < \varepsilon_k < \varepsilon_c \quad \varepsilon_F < \varepsilon_{k'} < \varepsilon_c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad 0 < \varepsilon_k, \varepsilon_{k'} < \varepsilon_c \ll \varepsilon_F$$

$$(2\varepsilon_k - E)\,\Psi(k) = +V N(0)\int_0^{\varepsilon_c} \Psi(k')\, d\varepsilon_{k'}$$

állapotsűrűség a Fermi-felületen

~~Ha $V<0$~~

$$\Psi(k) = +V N(0)\int_0^{\varepsilon_c} \Psi(k')\, d\varepsilon_{k'}\, \frac{1}{2\varepsilon_k - E}$$

$$\cancel{\int_0^{\varepsilon_c} \Psi(k')\, d\varepsilon_{k'}} = +V N(0) \cancel{\int_0^{\varepsilon} \Psi(k')\, d\varepsilon_{k'}} \int_0^{\varepsilon_c} \frac{1}{2\varepsilon_k - E}\, d\varepsilon_k$$

$$\frac{1}{VN(0)} = +\int_0^{\varepsilon_c} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon - E} = \frac{1}{2}\int_{-E}^{2\varepsilon_c - E} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{2\varepsilon_c - E}{-E}$$

$$\frac{1}{VN(0)} = \frac{1}{2}\ln\frac{2\varepsilon_c - E}{-E}$$

Gyenge csatolás közelítés: $V N(0) \ll 1$

$$\rightsquigarrow \quad 2\epsilon_c - E \gg -E \qquad\qquad a+x \gg x$$

$$\epsilon_c \gg -E \qquad\qquad \frac{a+x}{x} \gg 1$$

$$\cancel{\frac{2\epsilon_c}{-E} = e^{\frac{2}{VN(0)}}} \qquad \frac{1}{VN(0)} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{2\epsilon_c}{-E}$$

$$\cancel{\frac{2\epsilon_c - E}{-E} = e^{\frac{2}{VN(0)}}} \qquad \frac{2\epsilon_c}{-E} = e^{-\frac{2}{VN(0)}}$$

$$\boxed{E = -2\epsilon_c \, e^{-\frac{2}{VN(0)}}}$$

ha $E<0$ kötött állapot

1.) ~~Miért~~ Miért meglepő? Kötött állapot tetszőlegesen kis V vonzó k.h.-ra. Ha nincs Fermi-tenger, csak 2 részecske, akkor ez nem igaz.

Szükséges feltétel a kötött állapot kialakulására (Landau III):

$$\int |V(\underline{r})|^{3/2} d^3r > \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{3\hbar^2}{2m}\right)^{3/2}$$

2.) Nem perturbatív eredmény V-ben: $e^{-\frac{1}{x}}$-nek $x=0$-ban lényeges szingularitása van: $\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ $\forall n$-re

Consequences

Gap ⇝ superconductor is not a Fermi liquid!

Fermi gas: noninteracting Fermi particles

$\downarrow$ repulsion

Wigner crystal

QM: strong repulsion required for WC

In metals: "Fermi liquid"

qualitatively the same as Fermi gas

(weakly interacting Fermionic quasiparticles)

What happens if there is an attractive interaction?

For an arbitrarily weak attractive interaction, the FL is unstable against the formation of a superconducting state.

1. we show the instability
2. we show that the ground state is superconducting

(Cooper pairs)

~~Th~~ To proceed, we remove the restriction that

Q: True ground state? All electrons participate in Cooper-pair formation, not just 2.

$$\cancel{|\Psi_0\rangle = \sum_{k>k_F} g_{\underline{k}}\, c^{\dagger}_{k\uparrow} c^{\dagger}_{-\underline{k}\downarrow} |F\rangle}$$ ~~singlet pair~~

General N-pair wave function $\qquad \{c^{\dagger}_{k\sigma}, c_{k'\sigma'}\} = c^{\dagger}_{k\sigma} c_{k'\sigma'} + c_{k'\sigma'} c^{\dagger}_{k\sigma} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$

$$|\Psi_N\rangle = \sum g(k_{n_1}, \dots, k_{n_N})\, c^{\dagger}_{k_{n_1}\uparrow} c^{\dagger}_{-k_{n_1}\downarrow} \cdots c^{\dagger}_{k_{n_N}\uparrow} c^{\dagger}_{-k_{n_N}\downarrow} |0\rangle$$

Mean field ansatz by BCS:

~~Intuitive simplification by BCS:~~

$$\cancel{g(k_{n_1}, \dots, g_{k_{n_N}}) = v_{k_1} \cdot v_{k_2} \cdots v_{k_n}}$$

$$|\Psi_G\rangle = \prod_{k} (u_{\underline{k}} + v_{\underline{k}}\, c^{\dagger}_{k\uparrow} c^{\dagger}_{-\underline{k}\downarrow})|0\rangle \qquad u_k, v_k \in \mathbb{C}$$

$$|u_{\underline{k}}|^2 + |v_{\underline{k}}|^2 = 1$$

"Mean field" in the sense that the amplitude $v_{\underline{k}}$ of pair $\underline{k}\uparrow, -\underline{k}\downarrow$ is independent of the occupation of the other pairs, or

$$g(k_{n_1} \dots k_{n_N}) = v_{k_{n_1}} \cdot v_{k_{n_2}} \cdots v_{k_{n_N}} \qquad v_{k_i} \in \mathbb{C}$$

We only specify the average occupation of $\underline{k}\uparrow, -\underline{k}\downarrow$

$$|\Psi_G\rangle = \sum_{N=0,2,\dots} \lambda_N |\Psi_N\rangle$$ superposition of states with different number of pairs

$$|\Psi_G\rangle = (u_{k_1}\cdots u_{k_N})|0\rangle + u_{k_1}\cdots u_{k_{N-1}} v_{k_N} c^\dagger_{k_N\uparrow} c^\dagger_{-k_N\downarrow}|0\rangle + \cdots + u\ldots uvv\, c^\dagger c^\dagger c^\dagger c^\dagger$$

2-electron   4-electron

The meaning of v_k:

$$n_{k\sigma} \equiv \langle\Psi_G|c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma}|\Psi_G\rangle = |v_k|^2 = n_{-k-\sigma}$$

$$\langle 0| \prod_l (u_l^* + v_l^* c_{-l\downarrow} c_{l\uparrow})\, c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow} \prod_l (u_l + v_l c^\dagger_{l\uparrow} c^\dagger_{-l\downarrow})|0\rangle$$

$$|0\rangle = |0_{k_1}\rangle \otimes |0_{k_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |0_{k_N}\rangle$$

$$\langle 0| \prod(\ldots c_\ell \ldots)|0\rangle = \langle 0_1|(\ldots c_1 \ldots)|0_1\rangle \langle 0_2|(\ldots c_2\ldots)|0_2\rangle$$

One $l \neq k$ factor

$$\langle 0|\Big(|u_l|^2 + u_l^* v_l \cancel{c^\dagger_{l\uparrow} c^\dagger_{-l\downarrow}} + v_l^* u_l \cancel{c_{-l\downarrow} c_{l\downarrow}} + \underbrace{|v_l|^2 c_{-l\downarrow} c_{l\uparrow} c^\dagger_{l\uparrow} c^\dagger_{-l\downarrow}}_{|v_l|^2}\Big)|0\rangle$$

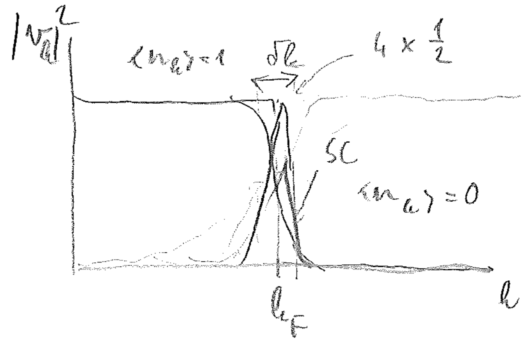
$$= |u_l|^2 + |v_l|^2 = 1$$

$l = k$ factor

$$|u_k|^2 \cancel{c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow}} + \cancel{u_k^* v_k c_{k\uparrow} c_{k\uparrow} c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow}} + \cancel{v_k^* u_k\, c c c^\dagger c}$$

$$+ \underbrace{|v_k|^2 c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} c^\dagger_{k\uparrow} c_{k\uparrow} c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow}}_{|v_k|^2}$$

8.) Fermi liquid is a special case of the Ansatz



$$\langle N \rangle = 2 \sum_k |v_k|^2$$

$$\langle \Delta N^2 \rangle \equiv \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = 4 \sum_k |u_k|^2 |v_k|^2$$

Fermi liquid: $\langle \Delta N^2 \rangle = 0$

SC: width of peak is $\frac{\delta k}{k_F} \sim \frac{T_c}{T_F} \sim 10^{-4}$ ($T_c \sim 1K$, $T_F \sim 10^4 K$)

$$\rightsquigarrow \Delta N^2 \sim \frac{T_c}{T_F} N$$

$$\frac{\Delta N}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{T_c}{T_F}} \sim 10^{-13}$$