Szupravezető sztatikus mágneses térben (Meissner-effektus)

$\underline{A}(\underline{r})$ vektorpotenciál $\quad \underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$ (Landau-mérték $\underline{\nabla}\cdot\underline{A}=0$)

$\underline{p} \to (\underline{p} - e\underline{A})$ kanonikus impulzus

Kin energia: $\dfrac{(\underline{p}-e\underline{A})^2}{2m}$ (pot. energia változatlan) $\quad \underline{p} = -i\hbar\underline{\nabla}$

Lin. válasz, $\underline{A}$-ban lineáris rendig perturbáció:

$$H_1 = \frac{ie\hbar}{2m}\sum_i \left(\underline{\nabla}_i \underline{A}(\underline{r}_i) + \underline{A}(\underline{r}_i)\underline{\nabla}_i\right) = \sum_{kk'\sigma} A_{kk'\sigma}\, c^+_{k'\sigma} c_{k\sigma}$$

i ← összes elektronra

$$A_{kk'} = \langle k' | H_1 | k\rangle$$

$$H_1|\underline{k}\rangle = \frac{ie\hbar}{2m}\left[\underline{\nabla}\left(\underline{A}(\underline{r})e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}\right) + \underline{A}(\underline{r})\,\underline{\nabla} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}\right]$$

$$= \cancel{(\underline{\nabla}\,\underline{A})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}} + i\underline{k}\cdot\underline{A}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + i\underline{k}\cdot\underline{A}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$\underline{\nabla}\,\underline{A} = 0$

$$H_1|\underline{k}\rangle = -\frac{e\hbar}{m}\,\underline{k}\cdot\underline{A}(\underline{r})\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \sum_q \underline{a}(q)\, e^{i\underline{q}\cdot\underline{r}} \quad\rightsquigarrow\quad H_1|\underline{k}\rangle = -\frac{e\hbar}{m}\sum_q \underline{k}\cdot\underline{a}(q)\, e^{i(\underline{k}+\underline{q})\cdot\underline{r}}$$

$$\langle k'|H_1|k\rangle = -\frac{e\hbar}{m}\sum_q \underline{k}\cdot\underline{a}(q)\,\underbrace{\int d^3r\, e^{-i\underline{k}'\cdot\underline{r}}\, e^{i(\underline{k}+\underline{q})\cdot\underline{r}}}_{\delta_{\underline{k}',\underline{k}+\underline{q}}}$$

$\underline{k}' = \underline{k}+\underline{q} \to \underline{q} = \underline{k}'-\underline{k}$

$$= -\frac{e\hbar}{m}\,\underline{k}\cdot\underline{a}(\underline{k}'-\underline{k}) = A_{kk'}$$

$$H_1 = -\frac{e\hbar}{m}\sum_{\underline{k}q\sigma} \underline{k}\cdot\underline{a}(q)\, c^+_{\underline{k}+q,\sigma}\, c_{\underline{k},\sigma} \qquad \text{(II. típusú)}$$

H_1-et a γ_{ki} operátorokkal fejezzük ki a c_k-k helyett:

$$c^+_{k'} c_k = (\overset{\overset{1}{\parallel}}{uu' + vv'})\left(\gamma^+_{k'0}\gamma_{k0} - \gamma^+_{k1}\gamma_{k'1}\right) + $$
$$+(\underset{\underset{0}{\parallel}}{u'v - v'u})\left(\gamma^+_{k'0}\gamma^+_{k1} - \gamma_{k1}\gamma_{k'0}\right)$$

$\underline{k}' = \underline{k}$-ra különösen egyszerű, mert $u' = u$, $v' = v$ miatt

$$c^+_k c_k = \gamma^+_{k0}\gamma_{k0} - \gamma^+_{k1}\gamma_{k1} \qquad \text{diagonális } \gamma\text{-kban is!}$$

Teljes H-operátor $q = 0$ perturbációra ($\underline{k}' = \underline{k}$):

$$H = H_0 + H_1 = \sum_{\underline{k}} \left[\left(E_k - \frac{e\hbar}{m}\underline{k}\cdot\underline{a}(0)\right)\gamma^+_{k0}\gamma_{k0} + \left(E_k + \frac{e\hbar}{m}\underline{k}\cdot\underline{a}(0)\right)\gamma^+_{k1}\gamma_{k1}\right]$$

$\underline{A}$-val arányosan felhasadnak a korábban degenerált kvázirészecske energiák!

A következő lépés: az áram számolása

Az áram operátora: $\hat{\underline{J}} = e\hat{\underline{v}} = \frac{e}{m}(\hat{\underline{p}} - e\underline{A})$

Kitérő a lin. válasz elméletről:

$\delta\underline{A}$: vektorpot.-hoz tartozó perturbáló operátor:

$$\delta H = -\int(-\underline{j})\cdot\delta\underline{A}\, d^3\underline{r} \qquad \text{lásd Landau V}$$

$\delta\underline{A}$ és $-\underline{j}$ konjugált termodinamikai mennyiségek

$$\underline{J}(\underline{r}) = -\frac{1}{\mu_0}\int \underline{\underline{K}}(\underline{r}-\underline{r}')\,\underline{A}(\underline{r}')\, d^3\underline{r}'$$

magfüggvény (Kernel)

Fourier-térben:

$$\underline{J}(q) = -\frac{1}{\mu_0}K(q)\,\underline{A}(q)$$

London-elméletben mi a kernel?

London II. $\quad \underline{j}(\underline{r}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \underline{A}(\underline{r})$

$$\rightsquigarrow \quad K(r-r') = \frac{1}{\lambda_L^2}\, \delta^3(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$K(q) = \frac{1}{\lambda_L^2} = \text{const.} = K(0) \qquad \text{"London-kernel"}$$

$T=0$-n $\quad \lambda_L^2(0) = \frac{m}{\mu_0 n e^2}$

Visszatérve az áram operátorhoz

$$\hat{J} = \sum_i e\,\hat{v}_i = \sum_i \left(e\frac{\hat{p}_i}{m} - \frac{e^2 A_i}{m}\right) = \hat{\underline{J}}_1 + \hat{\underline{J}}_2$$

$\langle \hat{J}_2(\underline{r})\rangle = -\frac{n e^2}{m}\underline{A}(\underline{r})$ éppen a tökéletes diamágnes

$\underline{J}_1$ paramágneses, ezt kell még kiszámolnunk

$\downarrow$

$K_1(q,T)$ kernel

$$K(q,T) = \frac{1}{\lambda_L^2(0)}\left[\underset{\underset{\underline{J}_2}{\uparrow}}{1} + \lambda_L^2(0)\,\underset{\underset{\underline{J}_1}{\uparrow}}{K_1(q,T)}\right]$$

$K(0,T)$ számolása

Kernel $q=0$ hullámszámon, a hőmérséklet függvényében.

$$K(0,T) = \frac{1}{\lambda_L^2(T)}$$ behatolási mélység T-függése

$$\hat{\underline{J}}_1 = \frac{e}{m}\sum_i \hat{\underline{p}}_i = \frac{e\hbar}{m}\sum_{\underline{k}\sigma} \underline{k}\, c^+_{\underline{k}\sigma} c_{\underline{k}\sigma}$$

$$= \frac{e\hbar}{m}\sum_{\underline{k}} \underline{k}\left(\gamma^+_{k0}\gamma_{k0} - \gamma^+_{k1}\gamma_{k1}\right)$$

$$\langle \underline{J}_1 \rangle = \frac{e\hbar}{m}\sum \underline{k}\left(f_{k0} - f_{k1}\right)$$

↑ Fermi-fv.

$q=0$-ra $\quad E_{k0,1} = E_k \mp \frac{e\hbar}{m}\underline{k}\cdot\underline{a}(0)$

$$f_{k0} - f_{k1} \approx -\frac{\partial f}{\partial E_k}\,\delta E_k = -\frac{\partial f}{\partial E_k}\,\frac{2e\hbar}{m}\,\underline{k}\cdot\underline{a}(0)$$

$$\langle J_1 \rangle = \frac{2e^2\hbar^2}{m^2}\sum_k \left[\underline{a}(0)\cdot\underline{k}\right]\underline{k}\left(-\frac{\partial f}{\partial E_k}\right)$$

$$= \underline{a}(0)\,\frac{2e^2\hbar^2}{m^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\,(2\pi k^2)\left(-\frac{\partial f}{\partial E_k}\right)\underbrace{\int_0^\pi \cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta}_{\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}}$$

$$= \underline{a}(0)\,\frac{2e^2\hbar^2}{3m^2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\,4\pi k^4\left(-\frac{\partial f}{\partial E_k}\right)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 \, dk = \mathcal{N}_s(E)\, dE = 2\mathcal{N}(0) \frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} dE$$

$$\langle J_1 \rangle = \underline{a}(0) \frac{4e^2}{3m} \underbrace{\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}}_{\varepsilon_F} 2\mathcal{N}(0) \int_\Delta^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) \frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} dE$$

$$\frac{4e^2}{3m}\varepsilon_F = \frac{1}{\mu_0} \frac{e^2 n \mu_0}{m} \overset{\frac{1}{\mathcal{N}(0)}}{\overset{\shortparallel}{\frac{4\varepsilon_F}{3n}}}$$

$$\langle J_1 \rangle = \underline{a}(0) \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(0)} 2 \int_\Delta^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) \frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} dE$$