Meissner-effektus (folytatás)

Sztatikus mágneses tér keltette lineáris válasz

$$\delta H = \int \underline{j}\,\delta\underline{A}\, d^3r$$ $\underline{j}$ és $\underline{A}$ konjugált mennyiségek

Fourier-reprezentációban:

$$\underline{J}(q) = -\frac{1}{\mu_0} \overset{\swarrow \text{ magfüggvény}}{K(q)}\, a(q)$$

London II.

$$\underline{J}(\underline{r}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} A(\underline{r})$$

London-elméletben: $K(q) = K(0) = \text{const.} = \frac{1}{\lambda_L^2}$

Véges T-re: $K(0,T) = \frac{1}{\lambda_L^2(T)}$

Perturbáció:

$$H_1 = \sum_i (A_i \nabla_i + \nabla_i A_i) = \sum_q \underbrace{\sum_{\underline{k}} \left(-\frac{e\hbar}{m} \underline{k}\cdot\underline{a}(q)\right)}\, C^+_{\underline{k}+q}\, c_{\underline{k}}$$

$\uparrow$

$(uu'+vv')(\gamma_0^+\gamma_0 - \gamma_1^+\gamma_1)$

$+ (uu'-vv')(\gamma_1^+\gamma_0^+ + \gamma_1\gamma_1)$

q = 0-ra diagonális:

$$H_1(0) = -\frac{e\hbar}{m} \sum_{\underline{k}} \underline{k}\cdot\underline{a}(0) \left(\gamma^+_{\underline{k}0}\gamma_{\underline{k}0} - \gamma^+_{\underline{k}1}\gamma_{\underline{k}1}\right)$$

$$\hat{\underline{J}} = e \sum_i \hat{v}_i = \frac{e}{m} \sum_i (-i\hbar\underline{\nabla} - e\underline{A}_i) =$$

$$= \sum_q \underbrace{\frac{e\hbar}{m} i \sum_{\underline{k}} \underline{k}\, C^+_{\underline{k}+q}\, c_{\underline{k}}}_{\underline{J}_1(q)} - \sum_q \underbrace{\frac{e^2}{m} \underline{a}(q) \sum_{\underline{k}} C^+_{\underline{k}+q} c_{\underline{k}}}_{J_2(q)}$$

$$\langle \underline{J}_2(0) \rangle = -\underbrace{\frac{\overset{\swarrow \text{ elektronok száma}}{n} e^2}{m}}_{\frac{1}{\mu_0} K_2(0) = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(0)}} \underline{a}(0)$$

Számolás eredménye: $K_1(0)$-ra:

$$K_1(0,T) = -\frac{1}{\lambda_L^2(0)}\, 2\int_\Delta^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) \frac{E}{\sqrt{\Delta^2-E^2}}\, dE$$

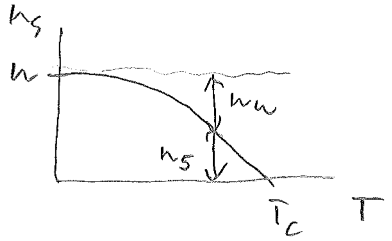
$$K_1(0,0) = 0 \qquad K_1(0,T_c) = -\frac{1}{\lambda_L^2(0)}$$

$$K(0,0) = \frac{1}{\lambda_L^2(0)} \qquad K(0,T_c) \approx 0$$ → nincs Meissner effektus

Értelmezés kétfolyadék modellben

szupra elektronok koncentrációja

$$K(0,T) = \frac{1}{\lambda_L^2(T)} = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m}$$



teljes elektronkoncentráció

$$K_2(0,T) = \frac{\mu_0 n e^2}{m}$$

normál elektron konc

$$K_1(0,T) = \frac{\mu_0 n_n e^2}{m}$$

n_n számolása BCS elméletben gondolatkísérlettel ([illegible]):

T. f., hogy ∀ elektron $\underline{u}$ sebességgel mozog.

Elektronrendszer impulzusa:

$$\underline{P} = n m \underline{u} = \underline{P}_n + \underline{P}_s = \underbrace{n_n m \underline{u}}_{\text{kvázirészecskék impulzusa}} + \overbrace{n_s m \underline{u}}^{\text{nyugva kondenzátum impulz}}$$

Kvázirészecskék impulzusa együttmozgó rendszerben

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$$

Laboratóriumi rendszerben (Galilei-transzformáció)

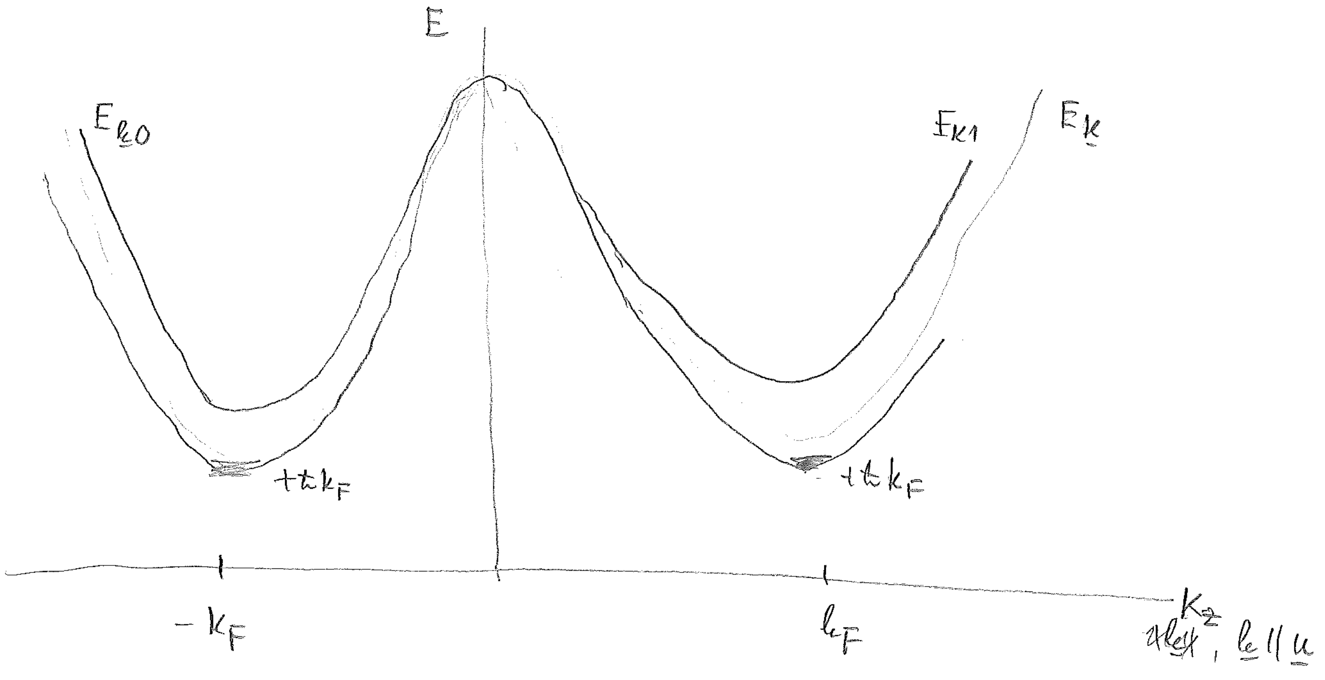
$$E_K \longrightarrow E_{\underline{K}} - \underset{\nwarrow}{p}\cdot\underline{u}$$

kvázirészecske impulzusa

$$\gamma^+_{\underline{k}0}|\Psi_G\rangle \rightarrow p = +\hbar \underline{k} \qquad \gamma^+_{k0} = u_k^* c^+_{\underline{k}\uparrow} - v_k^* c_{-\underline{k}\downarrow}$$

$$\gamma^+_{\underline{k}1}|\Psi_G\rangle \rightarrow p = -\hbar \underline{k} \qquad \gamma^+_{k1} = u_k^* c^+_{-\underline{k}\downarrow} + v_k^* c_{\underline{k}\uparrow}$$

$$E_{\underline{k}} \rightarrow \begin{cases} E_{\underline{k}0} = E_{\underline{k}} - \hbar \underline{k}\cdot\underline{u} \\ E_{\underline{k}1} = E_{\underline{k}} + \hbar \underline{k}\cdot\underline{u} \end{cases}$$



$$\underline{P}_n = \sum_{\underline{k}} \hbar \underline{k} \langle \gamma^+_{\underline{k}0}\gamma_{\underline{k}0} - \gamma^+_{\underline{k}1}\gamma_{\underline{k}1}\rangle$$

$$= \sum_{\underline{k}} \hbar k \left[f(E_k - \hbar \underline{k}\cdot\underline{u}) - f(E_k + \hbar \underline{k}\cdot\underline{u})\right]$$

$$= 2\hbar \sum_{\underline{k}} \underline{k}\cdot(\hbar \underline{k}\cdot\underline{u}) \left(-\frac{\partial f}{\partial E_k}\right)$$

$$= 2\hbar^2 u \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}}_{\uparrow} \int_0^\infty dk \cdot 2\pi k^2 \left(-\frac{\partial f}{\partial E_k}\right) \int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta$$

↑ k-állapotok egységnyi térfogatban

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\hbar^2 u \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk 4\pi k^4 \left(-\frac{\partial f}{\partial E_k}\right)$$

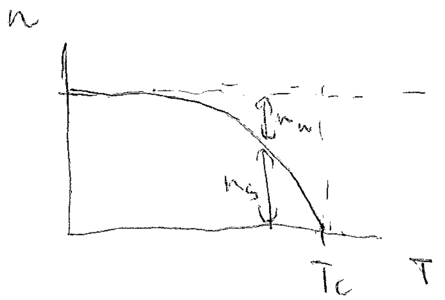
0-s és 1-es ág

$$\frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = N_s(E)\, dE \approx 2 N(0) \frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} dE$$

$$\underline{P}_n = \frac{4}{3}\hbar^2 k_F^2 N(0)\, \underline{u} \int_\Delta^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) \frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} dE$$

$$n_n = \frac{P}{mu} = 2n \frac{\cancel{4}}{\cancel{3n}} \underbrace{\frac{\hbar^2 k_F^2}{\cancel{2m}}}_{\varepsilon_F} \cancel{N(0)} \int (\ )dE$$

$$\frac{3n}{4\varepsilon_F} = N(0)$$



$$\frac{n_n}{n} = 2 \underbrace{\int_\Delta^\infty \left(-\frac{\partial f}{\partial E}\right) \frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} dE}_{\sum_k \left(-\frac{\partial f}{\partial E_k}\right)}$$

$$E_{k0,1} = E_k \overset{\overset{0}{\downarrow}}{\underset{\underset{1}{\uparrow}}{\mp}} \hbar \underline{k}\cdot\underline{u}$$

Mágneses térben: $E_{k0,1} = E_{\underline{k}} \mp \frac{e\hbar}{m} \underline{k}\cdot\underline{a}(c) \rightsquigarrow \underline{u} = +\frac{e^2}{m} a(0)$ ~~$neu = +\frac{ne^2}{m} a(c)$~~

Teljes kvázirészecske áram: n_n ~~$\underline{u}$ neA~~

Pontosan kijött az $-\frac{n_n e^2}{m} a(c)$ diam. járulékot

$\underline{u} = +\frac{e}{m}\,\underline{a}(0)$ kvázirészecske sebesség a paramágneses tagban

Paramágneses kvázirészecske áram: $J_{1n} = n_n e u = \frac{n_n e^2}{m}\underline{a}(0)$

Pontosan kiejti a $J_{2n} = -\frac{n_n e^2}{m}\underline{a}(0)$ diamágneses járulékot

$$\boxed{K(0,T) = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m}}$$

Mi a helyzet a fémmel

$n_n = n \rightsquigarrow K = 0 \rightsquigarrow$ nincs Meissner-effektus

Mi a helyzet egy sáv félvezetővel?

$T = 0 \rightsquigarrow$ nincsenek az alapállapotból gerjesztett kvázirészecskék

$\rightsquigarrow$ mi ejti ki a diamágneses járulékot?

Sebesség operátor $\underline{v} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon(\underline{k})}{\partial \underline{k}} = \underline{v}(\underline{k})$

Teljesen betöltött sávra $\int d^3k\, \underline{v}(\underline{k}) = 0$ (Bloch-tétel)

Mágneses térben $\underline{k} \to \underline{k} - \frac{e}{\hbar}\underline{A} \;\; \hat{}\!\int = 0$

$\uparrow$

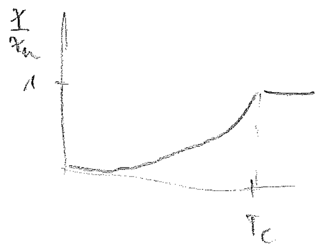
~~Peierls-helyettesítés~~

$\mathcal{H} = \varepsilon(-i\underline{\nabla})$ ill $\mathcal{H} = \varepsilon\left(-i\underline{\nabla} - \frac{e}{\hbar}\underline{A}\right)$ Peierls-helyettesítés

——— ∝ ———

Spinszuszceptibilitás

$$H_1 = -\mu_B B \sum_k \left[c^+_{\underline{k}\uparrow} c_{k\uparrow} - c^+_{k\downarrow} c_{k\downarrow} \right]$$



$$\rightsquigarrow \underset{\underset{q=0}{\uparrow}}{\chi(0)} = +2\mu_e^2 \sum_{\underline{k}} \left(-\frac{\partial f_k}{\partial E_k} \right) = 2\mu_e^2 n_n$$

— · —

Normál vezető:

$\langle \underline{v} \rangle = 0 \rightsquigarrow \underset{\underset{\text{kanonikus impulzus}}{\uparrow}}{\langle p \rangle} = -e\underline{A}$ „$\bar{p}$ alkalmazkodik a vektorpotenciálhoz"

Szupravezető $T=0$

$\bar{p}=0$ mágneses térben is $\rightsquigarrow \langle \underline{v} \rangle = \langle \bar{p} \rangle - e\underline{A} = \underset{\underset{\text{London II.}}{\uparrow}}{-e\underline{A}}$

„A Meissner-effektus oka a hullámfüggvény merevsége"

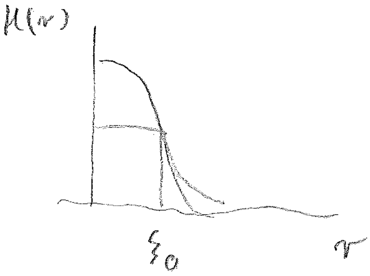
— · —

Kernel véges q-ra $K(q,0)$

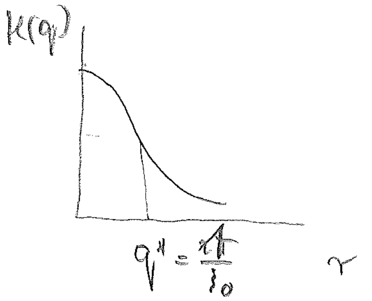
A $\underline{J}(q) = -\frac{1}{\mu_0} K(q)\, \underline{A}(q)$

$K(q) \neq$ const. ⇝ valós térben nem lokális függés

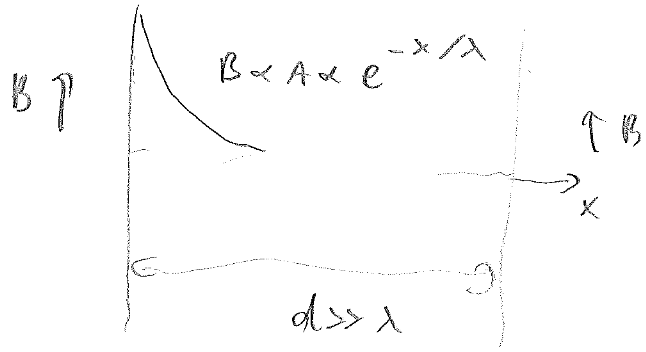
$$\underline{J}(\underline{r}) = \int d^3r' \; \cancel{B}\, K(r-r')\, \underline{A}(\underline{r}')$$



⇝



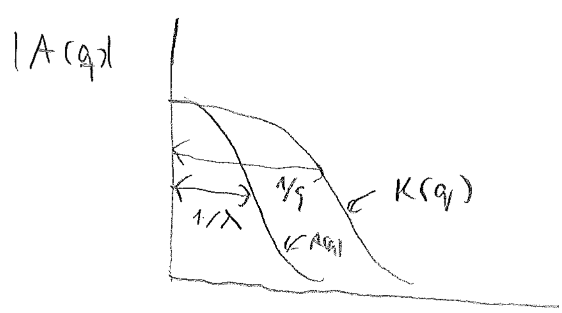
Meissner-effektus



A Fourier-spektruma

$$A(q) = A_0 \int_0^\infty e^{-x/\lambda} e^{iqx}\, dx = \frac{A_0}{\pi} \frac{1}{1+iq\lambda}$$

$$= \frac{A_0 \lambda}{1+iq\lambda}$$



Ha $\frac{1}{\lambda} \ll \frac{1}{\xi}$, azaz $\lambda > \xi$ ⇝ $K(q) \approx K(0)$ jó közelítés II.-fajú

⇝ lokális elektrodinamika

Ha $\lambda < \xi$ → $K(q)$ q-függése fontos → nemlokális elektr. I-fajú

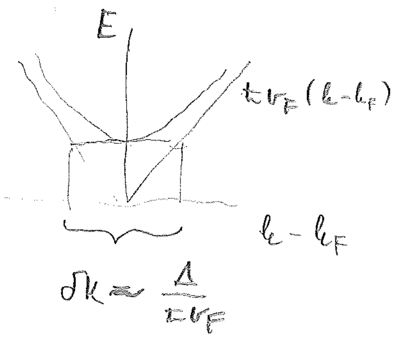
BCS elméletben: $\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$

Jelentése: Cooper-pár mérete (közvetlen számolásból is kijön) $g(k) \xrightarrow{FT} \cancel{\psi} g(r)$

Határozatlansági reláció

$\delta k \cdot \delta x \sim 1$

$\rightsquigarrow \delta x \sim \cancel{\Delta} \frac{\hbar v_F}{\Delta}$



Nagyságrendje: $v_F \sim 10^6$ m/s $\Delta \sim 10$ K $\rightsquigarrow \xi_0 \sim 10^{-6}$ m

Trend: nagy $T_c \rightsquigarrow$ nagy $\Delta \rightsquigarrow$ kis ξ

Keskeny sáv $\rightsquigarrow$ kis $v_F \rightsquigarrow$ kis ξ

$\xi_0 = 10^{-6}$ m-re több ezer elektron van a ξ_0 sugarú gömbön belül.