London-egyenletek:

szupravezetők fenomenologikus elektrodinamikája

$$m\dot{\underline{v}} = eE - m\frac{v}{\tau}$$

$$\dot{\underline{j}} = \frac{ne^2}{m}\,\underline{E}$$

$$\dot{\underline{j}} = \Lambda\,\underline{E}$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = \mu_0\,\underline{j} \qquad \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\cancel{\underline{\nabla}\times\underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

$$\underline{\nabla}\times\frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0\,\frac{\partial \underline{j}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla}\times\frac{\partial B}{\partial t} = \mu_0\Lambda\,\underline{E}$$

$$\underline{\nabla}\times\left(\underline{\nabla}\times\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right) = \mu_0\Lambda\left(\underline{\nabla}\times\underline{E}\right) = -\mu_0\Lambda\,\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{B}) - \nabla^2\underline{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\underline{\nabla}^2\underline{B} - \mu_0\Lambda\,\underline{B}\right] = 0$$

megoldás függ a kezdeti feltételtől?

$$\underline{\nabla}^2\underline{B} - \mu_0\Lambda\,\underline{B} = \text{const}$$

$$\underline{\nabla}^2 B - \mu_0\Lambda\,\underline{B} = 0$$

Maxwell-equations

+

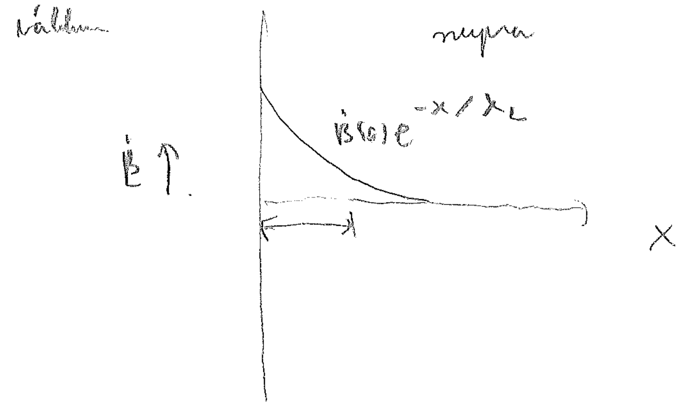
material equations : normal metal $\underline{j} = \sigma\underline{E}$ Ohm's law

+

boundary conditions

⇓

fields and currents



Tökéletes vezetőben $\underline{B}$ időben állandó, $\dot{\underline{B}}$ a felszínen λ_L mélységben lecseng. Nincs Meissner-effektus

London (III): $\nabla^2 \underline{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \underline{B}$ (const. = 0)

$\rightsquigarrow \underline{B}(x) = \underline{B}(0)\, e^{-x/\lambda_L}$ $\underline{B}$ λ_L távolságon lecseng.

— · —

(I.) $$\boxed{\frac{\partial \underline{j}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \underline{E}}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mu_0 \lambda_L^2\, \underline{\nabla} \times \frac{\partial \underline{j}}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

II. $$\boxed{\underline{B} = -\mu_0 \lambda_L^2\, \underline{\nabla} \times \underline{j}}$$

$$\rightsquigarrow \nabla^2 \underline{j} = \frac{1}{\lambda_L^2} \underline{j}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{A} = -\mu_0 \lambda_L^2 \, \underline{\nabla} \times \underline{J}$$

stac. esetben $\underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0$

$\rightsquigarrow$ $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$ (London mérték

+ „megfelelő" helyzetben (mivel a felülettől $\underline{A} \to 0$)

$$\boxed{\underline{A} = -\mu_0 \lambda_L^2 \, \underline{J}}$$

$\cancel{\underline{B} = (0, B(x), 0) \quad \underline{A}}$

$$\underline{B} = (0, B_0 e^{-x/\lambda_L}, 0)$$

$\cancel{\underline{A} = (A_x(y,z)}$

$$B_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z$$

$$\underline{A} = (0, 0, A(x))$$

$$B_y = -\partial_x A_z = B_0 e^{-x/\lambda_L}$$

$$A(x) = -\lambda_L B_0 e^{-x/\lambda_L}$$

$$\underline{J} = (0, 0, J(x))$$

$$J(x) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} A(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_L} e^{-x/\lambda_L}$$

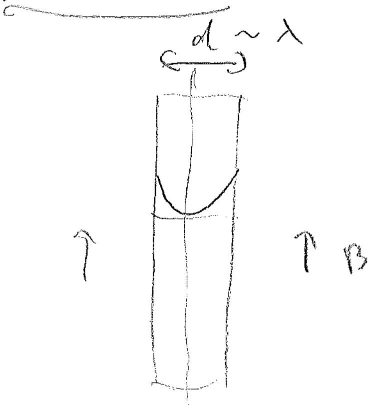
λ_L becslése

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n e^2} = \frac{10^{-31}\,\mathrm{kg}}{10^{-6} \cdot 10^{29} \cdot 10^{-38}} = 10^{-16}\,\mathrm{m}^2$$

$$\lambda_L \sim 10^{-8}\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{nm}$$

λ_L mérése: szuszceptibilitás, lokális (NMR, μSR)

λ mérése



$$\underline{B} = B_a \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{\lambda}}{\operatorname{ch} \frac{d}{2\lambda}}$$

$$\overline{\underline{B}} = \underline{B}_a \frac{2\lambda}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda}$$

$\frac{d}{\lambda} \to \infty \rightsquigarrow \bar{B} \to 0$ ha viszont $d \ll \lambda$

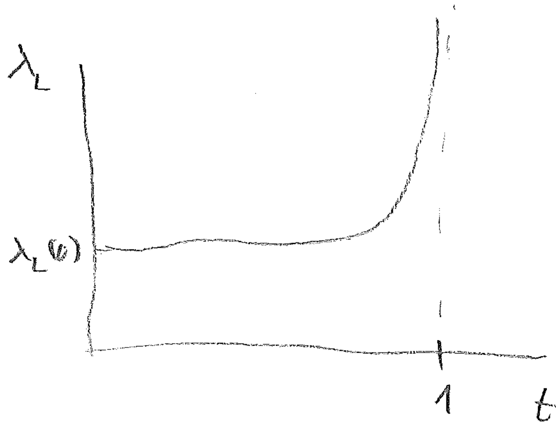
$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\overline{\underline{M}} = -\frac{1}{\mu_0} (\underline{B}_a - \overline{\underline{B}})$$

$$\bar{B} = \underline{B}_a \left(1 - \frac{d^2}{12\lambda^2}\right)$$

$$\boxed{\overline{\underline{M}} = -\frac{B_a}{\mu_0} \frac{d^2}{12\lambda^2}}$$

mikroszkópikus módszerek NMR, μSR



$t = \frac{T}{T_c}$

Empirikus formula:

$$\lambda = \lambda(0) (1 - t^4)^{-1/2} \qquad \lambda(0) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

Kétfolyadék modell

$$n = \underbrace{n_s}_{\text{„szupravezető"}} + \underbrace{n_n}_{\text{„normál"}}$$

Fenomenologikus értelmezés: "kétfolyadék modell"

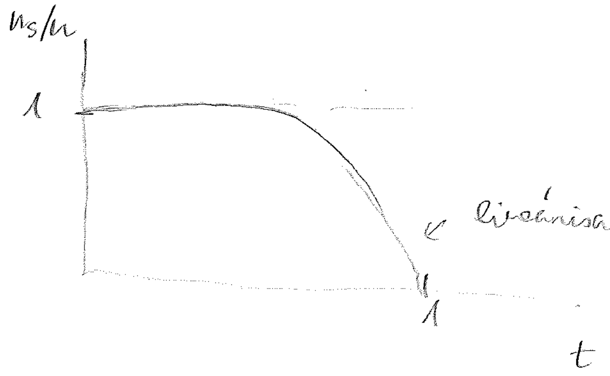
Drude-képlet: $\lambda_L(0) = \sqrt{\dfrac{m}{\mu_0 n e^2}}$

Véges hőmérsékleten nem minden elektron vesz részt a szupravezetésben:

$$n = \underbrace{n_s}_{\text{szupravezető}} + \underbrace{n_n}_{\text{"normális"}} = \text{const.}, \quad \text{de } n_s/n \text{ T-függő}$$

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s(T) e^2}}$$

Empirikus formula: $n_s/n = 1 - t^4$



lineárisan tűnik el

$\lambda_L \propto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, ha $t \to 1$

(akkor lesz átlagtér exponens, ha $\sqrt{n_s}$ a rendparaméter)

GL: $|\Psi|^2 = n_s$

komplex rendparaméter

Nagyfrekvenciás elektrodinamika

$$(L1) \quad \frac{d\underline{j}}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \underline{E}$$

$$\underline{j} \neq 0 \rightsquigarrow \underline{E} \neq 0$$

$$\underline{E} \to \underline{E}\, e^{i\omega t}$$

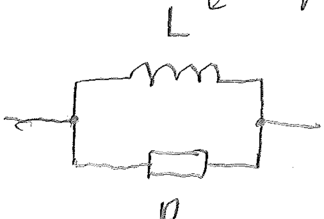
$$i\omega \underline{j} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \underline{E} \; ; \quad \underline{j} = \hat{\sigma}\, \underline{E}$$

Nincs valós rész
⇝ nincs szupravezetés?
félretesszük ezt a kérdést

$$\rightsquigarrow \hat{\sigma} = -i \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2 \omega}$$ tiszta képzetes ⇝ nincs disszipáció

DE! kétfolyadék modell $\quad n = n_s + n_n \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$

n_s: szupra elektronok; n_n: normál elektronok



L ← szupra elektronok

R ← normál elektronok valós ellenállás

⇝ véges frekvencián véges impedancia

Ötlet a Drude-modellből: hová lett a valós rész?

$$m\dot{\underline{v}} = e\underline{E} - \frac{m\underline{v}}{\tau} \qquad e^{i\omega\tau}$$

$$\left(\frac{m}{\tau} + mi\omega\right)\underline{v} = e\underline{E}$$

$$\underline{v} = \frac{e}{\frac{m}{\tau} + im\omega}\underline{E} = \frac{e\tau}{m}\frac{1}{1+i\omega\tau}\underline{E}$$

$$\underline{j} = ne\underline{v} = \underbrace{\frac{ne^2\tau}{m}}_{\sigma_0}\frac{1}{1+i\omega\tau}\underline{E}$$

$$\hat{\sigma}(\omega) = \sigma_0 \frac{1}{1+i\omega\tau} = \sigma_0 \frac{1-i\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$\hat{\sigma}(\omega) = \sigma_1 - i\sigma_2$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} \qquad \sigma_2 = \sigma_0 \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

Szupravezetőre:

$$\tau \to \infty$$

$$\sigma_1 = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \cancel{\frac{ne^2\tau}{m}} \delta(\omega\tau) = \frac{\pi}{2}\frac{ne^2}{m}\delta(\omega)$$

$$\sigma_2 = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \approx \frac{ne^2}{m\omega}$$, mint (L1)-ből, de megkaptuk a szupravezetést $\omega = 0$-nál ($\sigma_1 \to \infty$)

Mondhattam volna: $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x+i\varepsilon} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$$

Általános τ-ra:

$$\left[\int_0^\infty \sigma_1(\omega)\,d\omega = \frac{ne^2}{m}\int_0^\infty \frac{d(\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2} = \frac{\pi}{2}\frac{ne^2}{m}\right]$$ független τ-tól

<u>Összegszabály az oszcillátorerősségre</u>

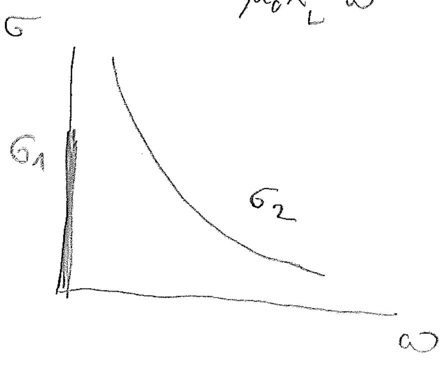
általánosan is igaz, nem csak Drude-modellre

(lin. válasz elmélet, Landau V.)

Vissza a London-egyenlethez:

$\omega > 0$-ra: $\sigma_1 \equiv 0$ hová lett az oszcillátorerősség? $\sigma_1(\omega) = \frac{\pi}{2}\frac{ne^2}{m}\delta(\omega)$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2 \omega}$$



Vissza a két folyadék-modellhez

$$n = n_s + n_n \rightsquigarrow \sigma = \sigma_s + \sigma_n$$

$$\sigma_{s1} = \frac{\pi}{2}\frac{n_s e^2}{m}\delta(\omega) \qquad \sigma_n \approx \frac{n_n e^2 \tau}{m}$$

$$\sigma_{s2} = \frac{n_s e^2}{m\omega} \qquad (\omega\tau_n \ll 1 \quad \omega \ll 10^{12}\,s^{-1})$$

Disszipáció: $P = \varrho J^2$

$$\varrho = \mathrm{Re}\frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \sigma_{s2}^2}$$

elég kis frekvencián:

$$\sigma_{s2} \propto \frac{1}{\omega} \gg \sigma_n$$

$$\rightsquigarrow \varrho \approx \frac{\sigma_n}{\sigma_{s2}^2} = \frac{n_n e^2 \tau_n / m}{n_s^2 e^4 / m^2}\omega^2 = \frac{n_n}{n_s}\frac{m\tau_n}{n_s e^2}\underline{\underline{\omega^2}}$$

$$T \to 0 \qquad \begin{matrix} n_n \to 0 \\ n_s \to n \end{matrix} \rightsquigarrow \frac{n_n}{n_s} \to 0$$

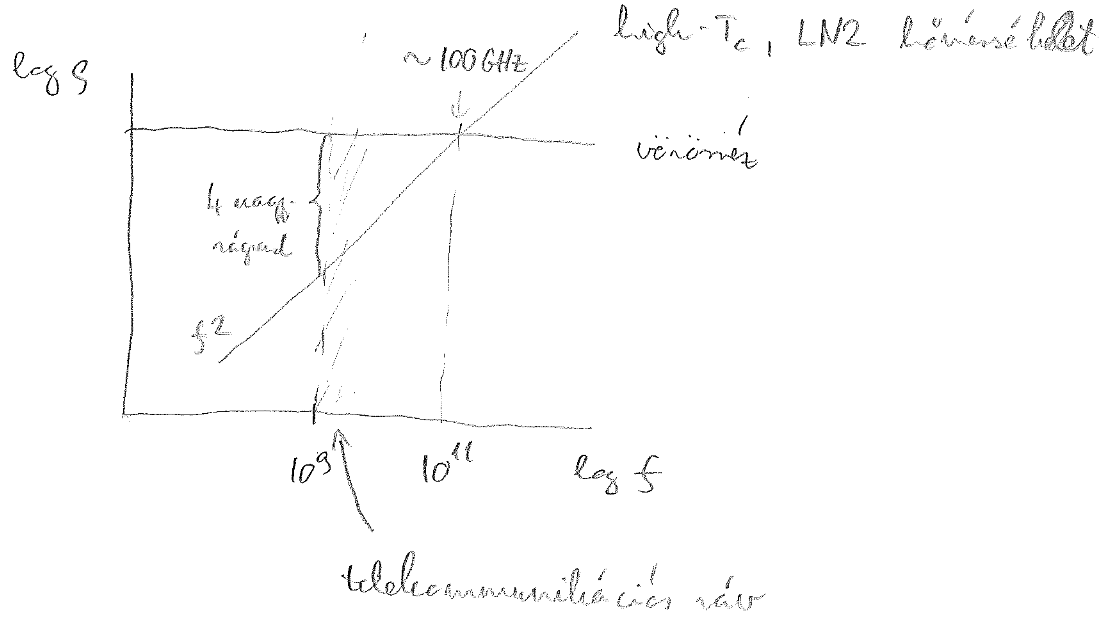
$\rightsquigarrow$ állandó ω mellett $\varrho \to 0$

Két folyadék modellbe

$$\left.\begin{matrix} n_s = 1 - t^4 & t = T/T_c \\ n_n = t^4 & \end{matrix}\right\} \varrho(\omega) \propto t^4$$

BCS elmélet: $n_n \propto e^{-\Delta/T}$

Nagyságrendek szemléltetése:



Távközlési sávban nagyságrendekkel kisebb a felületi impedanciája egy szupravezetőnek, mint a vörösréznek

$\rightsquigarrow$ rezonátor $Q \sim 10^{10}$ jósági tényezővel könnyen készíthető

Nagyharang: 100 Hz, 3 másodpercig halljuk

$$Q \approx 100\,\mathrm{Hz} \cdot 3\,\mathrm{s} = 300$$

Szupra harang:

$$Q \approx 10^{10} \rightsquigarrow 10^8\ \mathrm{s}\text{-ig lenne hallható}$$

$$1\ \text{nap} \sim 10^5\,\mathrm{s} \rightsquigarrow 1000\ \text{nap} \sim 3\ \text{év}$$