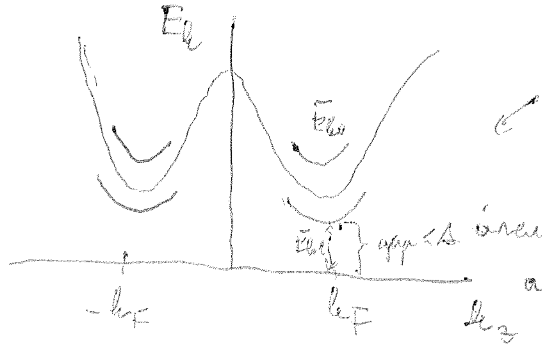
A Ginzburg–Landau ~~egyenletek~~ elmélet (1950)

Problémafelvetés: ~~erős terek és nagy áramok leírása~~

erős terek, nagy áramok és az ezek következtében a rendparaméterben fellépő térbeli inhomogenitás leírása.

áram, tér: "párfeltörő hatású" (pair-breaking)



← változatlan Δ-val számoltak

áram ill. tér hatására ~~megváltozik~~ csökken a rendparaméter

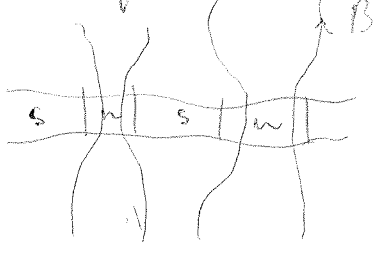
~~Terekben nemlineáris~~, szupraáramokban nemlineáris effektusok → "erős tér"

mágneses tér → csökken a gap → nő a kvázirészecskék száma → csökken a Δ rendparaméter
(szupraáram)

Térben/áramban másodrendű effektus ⇝ "erős tér", "nagy áram"

Példa alkalmazásra: Első fajú SC közbülső állapota

n és s tartományok egyensúlyban
→ térben inhomogén rendparaméter



GL elmélet diadala: s-n határfelületi energia számolása

⇝ ha bizonyos esetekben negatív felületi energia ⇝ másodfajú szupravezető (örvényfonalak)

~~GL eredeti megfogalm~~ Fenomenologikus GL-elmélet központi fogalma:

ψ szupravezető GL rendparaméter. $\psi(\mathbf{r})$ komplex szám
↖ helyfüggő

GL eredeti megfogalmazásában: ψ a "kondenzátum hullámfüggvénye"

Bose-kondenzációs kép: a részecskék makroszkopikus hányada van ugyanabban az egyrészecske állapotban. (v.ö. szuperfolyékonyság ^4He-ben)

$|\psi|^2 = \frac{1}{2} n_s$ ~~tor~~ párssűrűség
← BCS elmélet után tisztázódott

Korrespondencia BCS és GL elmélet között: Gorkov, 1960. "kicsi" Δ $(T \lesssim T_c)$, ~~egyéb megszorítások~~ $\Delta(\mathbf{r})$ "lassan" változik
~~$T \approx T_c$, egyéb megszorítások~~

$$\psi \propto \Delta(\mathbf{r})$$ ← BCS rendparaméter

↳ Megjegyzések előző órai számolásból

$$T \approx T_c \quad \leadsto \quad n_s \approx n(1-t)$$
$$|\Delta| \approx 1{,}74\, \Delta_0 \sqrt{1-t}$$
$$\Bigg\} \quad n_s \propto |\Delta|^2$$

Helyfüggő rendparaméter BCS-elméletben

Mezőoperátor: $\psi_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \cancel{\sigma}\, c_{\mathbf{k}\sigma}$

$$\{\psi^+_\sigma(\mathbf{r}), \psi_{\sigma'}(\mathbf{r})\}_+ = \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$H = \sum_\sigma \int d^3r\, \psi^+_\sigma(\mathbf{r}) \frac{(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2}{2m} \psi_\sigma(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} V \sum_\sigma \int d^3\mathbf{r}\, \psi^+_\sigma(\mathbf{r}) \psi^+_{-\sigma}(\mathbf{r}) \psi_{-\sigma}(\mathbf{r}) \psi_\sigma(\mathbf{r})$$

Rendparaméter: $\Delta(\mathbf{r}) = V \langle \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \rangle$

$$\psi \propto \Delta(\mathbf{r})$$
↑
GL rendparaméter

1. Sorfejtés a ~~vezető~~ szabadenergia-sűrűségre a rendparaméter kis értékeire:

$$F = \int f \, dV$$

$\uparrow$ szabadenergia sűrűség

1.) ~~Ha~~ Térben homogén rendparaméter mágneses tér nélkül

$$f = f_n + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \dots \qquad |\psi| \text{ "kicsi" } \sim T \approx T_c$$

Nem függhet ψ fázisától $e^{i\pi}\psi = -\psi \rightsquigarrow$ páratlan tagok eltűnnek

a) f_n = szabadenergia $\psi = 0$-ra $\rightsquigarrow$ normál fázis

~~$|\psi|$ $a<0$~~ $b>0$, különben nincs minimum

$a<0$, $\rightsquigarrow$ minimum: $\psi = 0$

$a>0$, $\rightsquigarrow$ $|\psi|>0$

$$a = \alpha(T - T_c) \qquad b(T) \approx b(T_c) = \text{konst.} > 0$$

Egyensúlyi $|\psi|$: $\frac{\partial f}{\partial |\psi|} = 2|\psi|(a + \cancel{2} b|\psi|^2)$

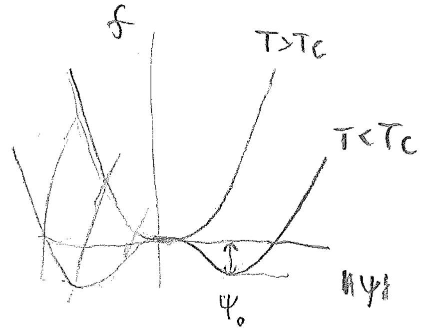
$$|\psi|^2 = -\frac{a}{b} \approx \frac{\alpha}{b}(T_c - T) \qquad |\psi| \propto \sqrt{1-t} \text{ átlagtér}$$

Visszahelyettesítve:

$$f_s - f_n = -\frac{\alpha^2}{2b}(T_c - T)^2$$

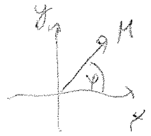
$$|\psi|^2 = \frac{1}{2} \cancel{B_s} \approx \frac{\alpha^2}{2b} T_c (1-t)$$

~~$f_s - f_n = -\frac{B_c^2}{2\mu_0} \neq$~~



Térben változó rendparaméter

Pl. x-y ferromágnes $\underline{M}(\underline{r}) = |\underline{M}|\, \cancel{\cos\varphi}\, e^{i\varphi}$ M



$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$

$M_x = |M| \cos\varphi$

$M_y = |M| \sin\varphi$

Kitérítünk egy momentumot $\Delta\varphi$-vel $\sim$ visszatérítő erő $-k\,\Delta\varphi$

Energia $\frac{1}{2} k\, \Delta\varphi^2 \xrightarrow[\text{kontinuum}]{} |\nabla\varphi|^2$

Általában: ~~sorfejtésben~~ f sorfejtésében ψ deriváltjai is megjelennek

~~Izotróp rendszer~~ (Általánosságban lásd Landau–Lifsic, V. 146. §)

~~Izotróp testben legalacsonyabb rendű kombináció~~, Legalacsonyabb rendű kombináció

$$\sum_{ik} g_{ik}(T) \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

Izotróp esetben: $|\nabla\psi|^2$ $g_{ik} = g\,\delta_{ik}$

Lassan változó rendparaméterre a többit elhagyjuk

~~Ha ψ a kondenzátum hullámfv.-e $\sim$ $|\nabla\psi|^2 \propto p^2$ kinetikus energia~~

Látni fogjuk, hogy a szupra árammal kapcsolatos járulékot írja le.

$$\frac{1}{2} n_s \frac{p^2}{2\cdot 2m} \to \frac{\hbar^2}{4m} |\nabla\psi|^2 \qquad \frac{1}{2} n_s \cancel{2m}\, p^2$$

$$\frac{1}{4m} |-i\hbar\nabla\psi|^2$$

~~Térben: $-i\hbar$~~

Mágneses térben két változtatás: $\frac{1}{2} \underline{B}\cdot\underline{M}$

1.) $-i\hbar\underline{\nabla} \to -i\hbar\underline{\nabla} - \underbrace{2e}_{e^*}\underline{A}$

e^* = Cooper-pár töltése

2.) mágneses energia (Meissner-eff.) $\frac{B_a^2}{2\mu_0}$

$g\,|\nabla\psi|^2 \qquad g = \frac{\hbar^2}{2m^*} \qquad \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2$

$\uparrow$ ez fog megfelelni a kondenzátum kinetikus energiájának

Mágneses térben:

1.) $-i\hbar\underline{\nabla} \to -i\hbar\underline{\nabla} - e^*\underline{A}(\underline{r})$

2.) ~~mágneses energia~~ $\cancel{-\frac{1}{2}\underline{B}\underline{M}}$ mágneses energia $\frac{B^2}{2\mu_0}$

$e^* = ?$ $\qquad \Delta(\underline{r}) = V\langle\psi_\uparrow(\underline{r})\,\psi_\downarrow(\underline{r})\rangle$

$\underline{A} \to \underline{A} + \underline{\nabla}\chi$ mértéktranszformáció $\to \psi_\sigma(\underline{r}) \to \psi_\sigma(\underline{r})\,e^{\frac{ie}{\hbar}\chi(\underline{r})}$

$\rightsquigarrow \Delta(\underline{r}) \to \Delta(\underline{r})\,e^{\frac{2ie}{\hbar}\chi(\underline{r})}$

$\rightsquigarrow e^* = 2e$

Teljes GL szabadenergia

$$F = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normál},\ \underline{A}=0}}{F_{n0}} + \int d^3r\left\{a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(-i\hbar\nabla - 2e\underline{A}(\underline{r})\right)\psi\right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right.$$

Variáljuk $\Psi, \underline{A}$ szerint

Variáció $\delta F = 0$

Ψ komplex → két független variációs paraméter: Ψ, Ψ^*

Ψ^* szerint variálva

$$\delta(\Psi^*\Psi) = \Psi\,\delta\Psi^*$$

$$\delta(\Psi^*)^2\Psi^2 = 2|\Psi|^2\Psi\,\delta\Psi^*$$

$$\left[\left(\nabla\Psi - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\Psi\right)\left(\nabla\Psi^* + \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\Psi^*\right)\right] = \left(\nabla\Psi - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\Psi\right)\left(\underline{\nabla}\delta\Psi^* + \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\,\delta\Psi^*\right)$$

$$\int\left(\nabla\Psi - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\Psi\right)\underline{\nabla}\,\delta\Psi^* d^3r = \oint\left(\underline{\nabla}\Psi - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\Psi\right)\delta\Psi^*\, d\underline{f} - \int d^3r\left(\nabla^2\Psi + \frac{2ie}{\hbar}\underline{\nabla}(\underline{A}\cdot\Psi)\right)\ldots$$

$$\partial_i(A_i\Psi) = (\partial_i A_i)\Psi + A_i\partial_i\Psi$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\cdot\Psi) = \Psi\,\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + (\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\Psi$$

$$\delta F = \int\left\{-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\underline{\nabla} - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\right)^2\Psi + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi\right\}\delta\Psi^* d^3r + \oint\left(\nabla\Psi - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\Psi\right)\delta\Psi^* d\underline{f}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m^*}\left(-i\hbar\underline{\nabla} - 2e\underline{A}\right)^2\Psi + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi = 0}$$

$\underline{A}$ szerint variálva:

$$\delta\left(\frac{1}{2\mu_0}(\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{A}}_{\underline{B}})^2\right) = \frac{1}{\mu_0}(\underline{\nabla}\times\underline{A})(\nabla\times\delta\underline{A}) \xrightarrow{\text{parc. integrálás}} \frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})\,\delta\underline{A} = \frac{1}{\mu_0}(\underline{\nabla}\times\underline{B})\,\delta\underline{A}$$

$$\delta\left\{\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\right)\Psi\left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar}\right)\Psi^*\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m^*}\delta\underline{A}\left[-\frac{2ie}{\hbar}\Psi\left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\right)\Psi^* \cancel{\Psi^*}\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar}\underline{A}\right)\Psi\;\frac{2ie}{\hbar}\right] =$$

$$= \left\{\frac{2ie\hbar}{2m^*}\left[\Psi\underline{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\underline{\nabla}\Psi\right] + \frac{4e^2}{m^*}|\Psi|^2\underline{A}\right\}\delta\underline{A}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$$

$$\underline{J} = -\frac{2ie\hbar}{2m^*}\left[\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right] - \frac{4e^2}{m^*}|\psi|^2 \underline{A}$$ a kondenzátum által szállított áram

$\boxed{e^* = 2e}$ $\cancel{|\psi|^2 = \frac{1}{2}}$ mértékinvariancia megköveteli

~~m^* legyen $2m$ ... Landaunál $e^* = e$~~, Eredeti GL: $e^* = e$, $m^* = m$

Akkor $\frac{4e^2}{m^*}|\psi|^2 = \frac{e^2 n_s}{m}$ kell, hogy visszakapjuk a London egyenletet

Szokásos választás: $\boxed{m^* = 2m}$ (2e töltésű, 2m tömegű e-párok)

$\rightsquigarrow \boxed{|\psi|^2 = \frac{1}{2} n_s}$

$$\underline{\mathrm{II.}} \quad \boxed{\underline{J} = -\frac{ie\hbar}{2m}\left[\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right] - \frac{2e^2}{m}|\psi|^2 \underline{A}}$$

$$\psi = |\psi| e^{i\varphi}$$ gyors

$\cancel{\underline{J} = 1}$

Gledhill végéig

α és β kifejezése λ_L-val és B_c-vel

$$\frac{B_c^2}{2\mu_0} = \frac{\alpha^2}{2\beta} \quad \text{kondenzációs energia}$$

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2} = \frac{m}{2\mu_0 |\psi|^2 e^2}$$

kis térben $|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} n_s$

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{2\mu_0 \lambda_L^2 e^2}$$

$$\alpha = -2 \frac{\frac{\alpha^2}{2\beta}}{\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)} = -\frac{2e^2}{m} B_c^2 \lambda_L^2$$

$$\left.\begin{array}{l} B_c \propto T_c - T \\ \lambda_L^2 \propto \frac{1}{T_c - T} \end{array}\right\} \alpha \propto T - T_c$$

$$\beta = -\frac{\alpha}{\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \mu_0 \frac{4e^4}{m^2} B_c^2 \lambda_L^4$$

A GL koherenciahossz

$\underline{A}=0$ akkor Ψ valósnak választható

Legyen $f=\Psi_\infty$ a termikus egyensúlyi érték tömbi mintában $\Psi_\infty^2=-\frac{b}{a}$
$\uparrow$ ∞ távol $\forall$ perturbációtól $\Psi_\infty>0$, mert $a\propto\alpha(T-T_c)$

Jelölés $f\equiv\frac{\Psi}{\Psi_\infty}$ dimenziótlan

1 dimenzióban: 1 dim, csak x irányban változik f

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{d^2f}{dx^2}+af+b\left(-\frac{a}{b}\right)f^3=0$$

$$\frac{\hbar}{4m|a|}\frac{d^2f}{dx^2}+f-f^3=0$$

$$\xi^2(T)=\frac{\hbar^2}{4m|\alpha(T)|}\propto\frac{1}{1-t}$$

BCS elméletben: $\xi(T)=0{,}74\frac{\xi_0}{\sqrt{1-t}}\to\infty$ $T\to T_c$

ξ jelentése?

Egyensúlyban $f=1$ $(\Psi=\Psi_\infty)$
kis perturbáció $f=1+g(x)$ $g\ll1$

$$\xi^2g''+(1+g)-(1+3g+\dots)=0$$

$$g''=\frac{2}{\xi^2}g$$

$$g(x)\propto e^{-\sqrt{2}x/\xi}$$

Rendparaméter kis fluktuációi ξ hossz alatt lecsengenek.

$$\xi(T)\propto\lambda(T)\quad\rightsquigarrow\quad\kappa\equiv\frac{\lambda(T)}{\xi(T)}=\text{const}$$ pontosan

BCS: $\kappa=0{,}96\frac{\lambda_L(0)}{\xi_0}$

$$\kappa=\frac{2\sqrt{2}\,\pi B_c\lambda^2}{\Phi_0}$$

$\Phi_0=\frac{2e}{h}$ fluxus kvantum