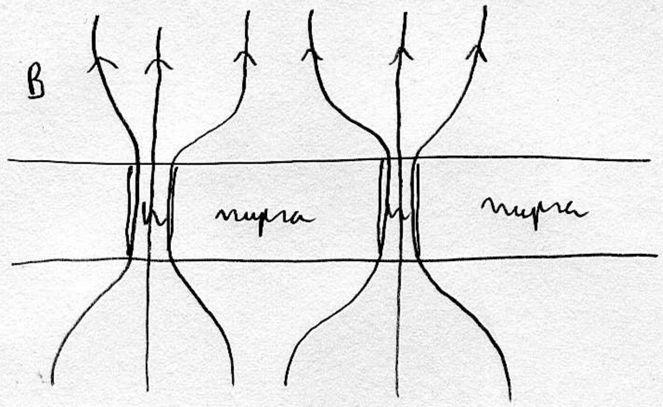
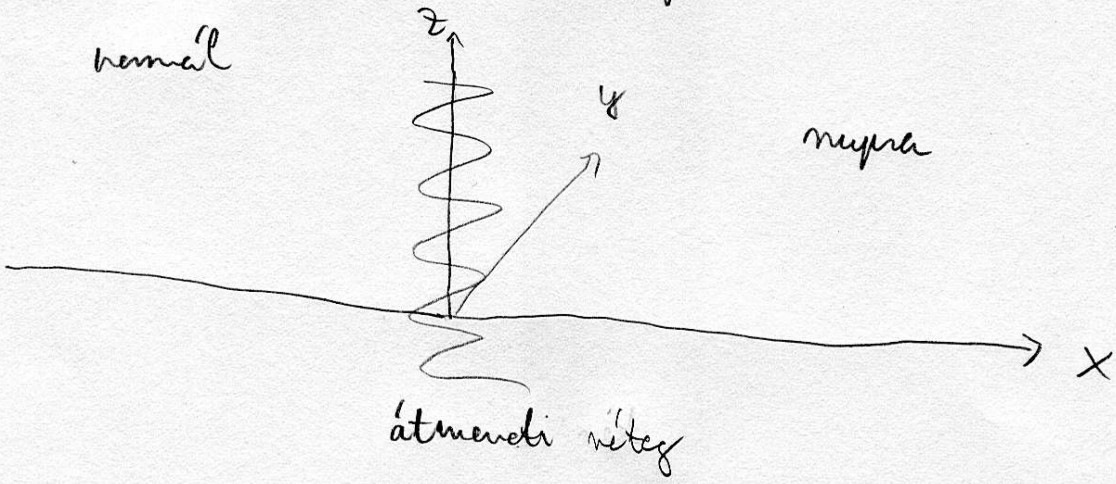
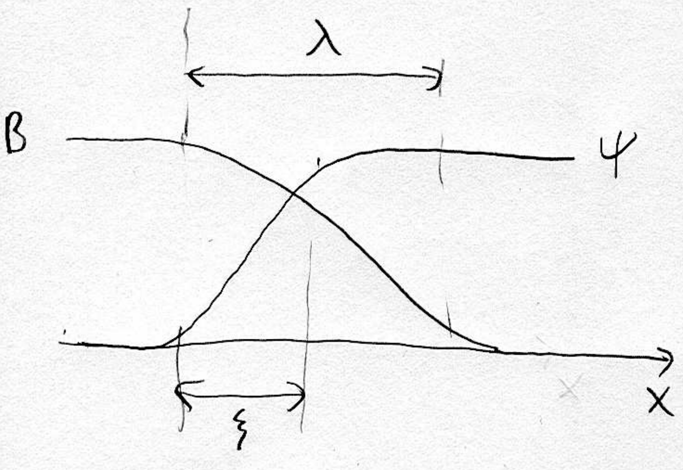
Normál - szupravezető határfelület energiája

Emlékeztető: átmeneti fázis I. fajú szupravezetőben



Egyetlen szupra-normál doménfal





$$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \\ \psi \to 0 \\ |\underline{B}| \to B_c \end{array}\right\} \text{ normál}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \to +\infty \\ \psi \to \psi_\infty \\ \underline{B} \to 0 \end{array}\right\} \text{ szupra}$$

$\underline{B} = (0, 0, B(x))$

$\underline{A} = (0, A(x), 0) \qquad B_z \equiv B(x) = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} = \dfrac{d A(x)}{d x}$

Bevezetjük $\underline{M}$-et és $\underline{H}$-t

$$\operatorname{rot} \underline{M} = \underline{J}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$$

$$\operatorname{rot} \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{B} - \operatorname{rot} \underline{M} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{B} - \underline{J} = 0, \text{ mert } \operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{J}$$

$$\underline{H} = (0, 0, H(x))$$

$$(\operatorname{rot} \underline{H})_y = -\frac{d H(x)}{d x} = 0 \rightsquigarrow \boxed{\underline{H} = \text{const.}!}$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} B_c$$

Célszerű áttérni az f szabadenergiában $\underline{B}$ változóról $\underline{H}$ változóra:

$$\tilde{f} = f - \underline{H} \cdot \underline{B} \qquad \text{Legendre-transzformáció}$$

$\underline{H} = \text{konst} \rightsquigarrow$ ②

$\tilde{f} = f - \underline{B} \cdot \underline{H}$ szabadenergiát használjuk

Szupra fázis mélyén $\tilde{f} = f_{s0}$, mert $B=0$

Normál fázis mélyén $\tilde{f} = \underbrace{f_n + \cancel{\frac{B_c^2}{2\mu_0}} \cancel{\frac{B_c^2}{\mu_0}} \frac{B_c^2}{2\mu_0}}_{f_n(B)} \underset{\underset{B \cdot H}{\uparrow}}{- \frac{1}{\mu_0} B_c^2} = f_n - \frac{B_c^2}{2\mu_0} = f_{s0}$

Doménfal energiája

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{f} - f_{s0} \right) dx \qquad [J/m^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_s(B) - BH_c - f_{s0} \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\alpha |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \left(-i\hbar \nabla - 2eA \right) \psi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] + f_n}_{f_{sB} - f_n} - \left(f_n - \frac{B_c^2}{2\mu_0} \right)$$

$$f_s(B) = f_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \cancel{\frac{1}{4m}} \rightsquigarrow \frac{1}{4m} \left| \left(-i\hbar \nabla - 2eA \right) \psi \right|^2 + \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$f_{s0} = f_n - \frac{B_c^2}{2\mu_0} \qquad B\text{-s tagok} \quad \frac{1}{2\mu_0} \left(B^2 + B_c^2 - 2BB_c \right) = \frac{(B_c - B)^2}{2\mu_0}$$

$$f_{sB} - BH_c - f_{s0} = \alpha |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \left(-i\hbar \nabla - 2eA \right) \psi \right|^2 + \frac{(B_c - B)^2}{2\mu_0}$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{4m} \left(|\psi'|^2 + \frac{4e^2}{\hbar^2} A^2 |\psi|^2 \right) + \frac{(B_c - B)^2}{2\mu_0} \right\} dx$$

$x: \quad \cancel{\left|-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi'\right|^2 = \hbar^2 |\psi'|^2}$

$y: \quad \cancel{4e^2 A^2 |\psi|^2}$

$z: \quad \cancel{0}$

(GL1) $\quad a\psi + b|\psi|^2\psi + \frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla - 2e\underline{A}\right)^2 \psi = 0 \quad | \int \psi^*$

$$0 = \int \left[\alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 + \frac{1}{4m}\psi^* \left(-i\hbar\nabla - 2e\underline{A}\right)^2 \psi\right] d\underline{x} =$$

$$= \int \left[a|\psi|^2 + b|\psi|^4 + \frac{1}{4m}\left|\left(-i\hbar\nabla - 2e\underline{A}\right)^2 \psi\right|^2\right] d\underline{x}$$

J/m³

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{(B-B_c)^2}{2\mu_0}\right] dx = \frac{B_c^2}{2\mu_0}\delta$$

m

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{B}{B_c}\right)^2 - \left(\frac{\psi}{\psi_\infty}\right)^4\right] dx$$

$$\frac{B_c^2}{2\mu_0} = \frac{a^2}{2b} \qquad \psi_\infty^4 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a^2}{2b}} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{\psi_\infty^4}$$

Integrandus: 2 energiasűrűség (normálva $\frac{B_c^2}{2\mu_0}$-lal)

1.) mágneses tér kiszorulása > 0

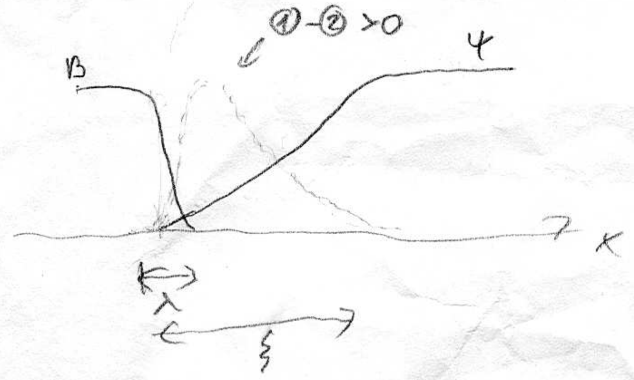
2.) kondenzációs energia < 0

Normál fázis mélyén: ① = ② = 0

Szuprafázis mélyén: ① = ② = 1 $\rightsquigarrow$ ① − ② = 0

Doménfalban: ① − ② $\neq 0$

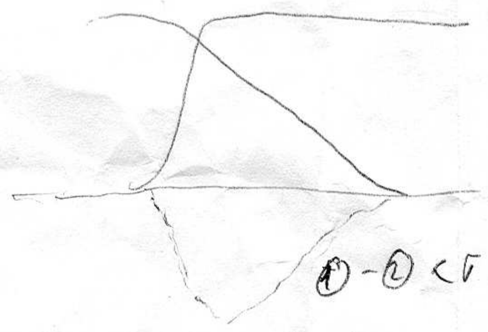
I. ~~K >> 1~~ $K \equiv \frac{\lambda}{\xi} \ll 1$



$\gamma > 0$ doménfal kedvezőtlen

I.-fajú szupravezető

II. $K \equiv \frac{\lambda}{\xi} \gg 1$



$\rightsquigarrow \gamma < 0$

II.-fajú szupravezető

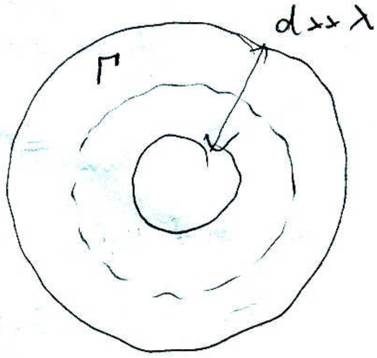
$K \leftarrow$ $\delta = \frac{4\sqrt{2}}{3}\xi$

$$\delta = \frac{-8(\sqrt{2}-1)\lambda}{3}$$

Megmutatható, hogy az elégváltás $K = \frac{1}{\sqrt{2}}$ -nél következik be.

Fluxoid kvantálás

$$\psi = |\psi| e^{i\varphi} \qquad \underline{j} = -\frac{ie\hbar}{2m}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right) - \frac{2e^2}{m}|\psi|^2 \underline{A}$$



$$\underline{\nabla}\psi = (\underline{\nabla}|\psi|)e^{i\varphi} + i|\psi| e^{i\varphi}\underline{\nabla}\varphi$$

$$\psi^* \underline{\nabla}\psi = |\psi|\,\underline{\nabla}|\psi| + i|\psi|^2 \underline{\nabla}\varphi$$

$$\psi^* \underline{\nabla}\psi - \psi\underline{\nabla}\psi^* = 2i|\psi|^2\underline{\nabla}\varphi$$

$$\underline{j} = \frac{e\hbar}{m}|\psi|^2 \nabla\varphi - \frac{2e^2}{m}|\psi|^2\underline{A} = \frac{e\hbar}{m}|\psi|^2\left(\nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar}\underline{A}\right)$$

Mágneses tér hiányában: $|\psi|^2 = -\frac{a}{b}$ $|\psi_\infty|^2$ $= \text{const.}$ $\quad \frac{1}{4m}\left|\left(-i\hbar\underline{\nabla} - 2e\underline{A}\right)\psi\right|^2 = \dots$

$$\underline{j} = \frac{e\hbar}{m}|\psi|^2\left(\underline{\nabla}\varphi - \frac{2e}{\hbar}\underline{A}\right) = 0$$ a szupravezető belsejében

$\oint_\Gamma \underline{j}\,d\underline{l} = 0 \qquad \oint_\Gamma \underline{\nabla}\varphi\, d\underline{l} = 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$, különben ψ nem egyértékű

$\oint_\Gamma \underline{A}\,d\underline{l} = \int_\Gamma (\underline{\nabla}\times\underline{A})\,df = \int \underline{B}\,d\underline{f} = \Phi$ fluxus Γ-ra

$$\oint \underline{j}\,d\underline{l} = 0 \qquad \frac{2e}{\hbar}\Phi = 2\pi n \quad \rightsquigarrow \quad \Phi = n\frac{h}{2e} = n\Phi_0$$

$$\left[\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}07\cdot 10^{-15}\ \underset{\text{Wb}}{\overset{\text{Tm}^2}{\shortparallel}}\right]$$

A lyuk közelében, ahol $\underline{j} \neq 0$

$$\underline{j} = n_s e\,\underline{v}_s \qquad |\psi|^2 = \frac{1}{2}n_s$$

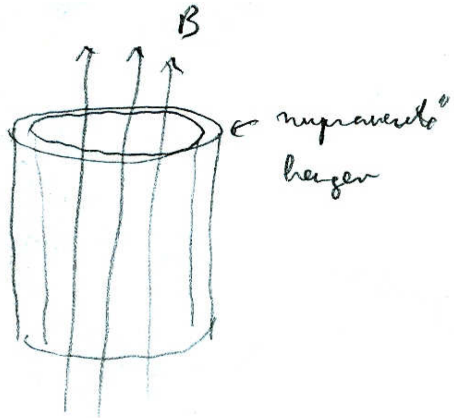
$$\Phi' = \Phi + \frac{m}{e}\oint \underline{v}_s\,d\underline{l}$$

$$\nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar}\underline{A} = \frac{m}{e\hbar}\,\underline{j}/|\psi|^2$$

$$\frac{\hbar}{2e}\nabla\varphi - \underline{A} = \frac{m}{2e^2}\left(\underline{j}/|\psi|^2\right) \quad \Big|\ \oint_\Gamma$$

$$\underbrace{\Phi + \frac{m}{2e^2}\oint\frac{\underline{j}}{|\psi|^2}dl}_{\Phi'\ \text{"fluxoid"}} = n\Phi_0$$

Little–Parks kísérlet



Elv: ha $\Phi = n\Phi_0$

$\rightsquigarrow \oint \underline{v}_s \, d\underline{l} = 0 \quad \Phi' = \Phi$

$\rightsquigarrow E_{kin} = 0$

ha $\Phi \neq n\Phi_0 \rightsquigarrow \Phi' \neq 0$

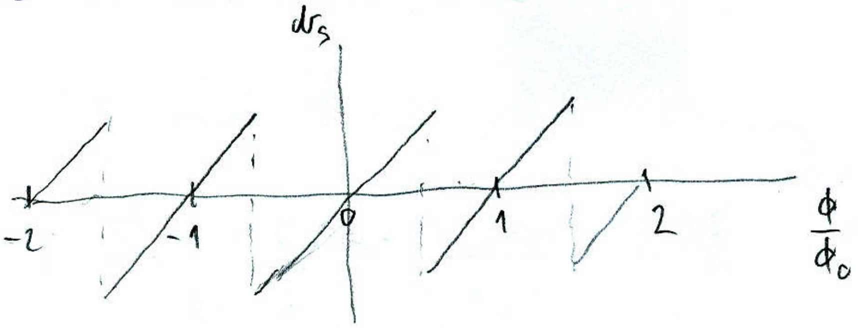
$\rightsquigarrow \oint \underline{v}_s \, d\underline{l} \neq 0 \rightsquigarrow E_{kin} \neq 0 \rightsquigarrow$ kondenzációs energia csökken $\rightsquigarrow$

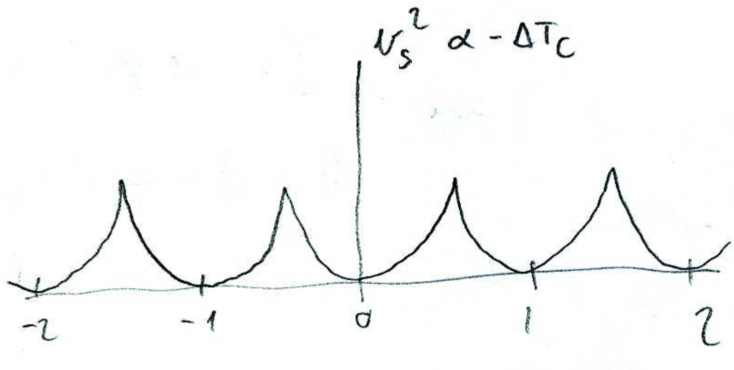
$\rightsquigarrow$ <u>T_c csökken</u>

$$\frac{\Delta T_c}{T_c} \simeq 0{,}55 \, \frac{\xi_0^2}{R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

Pl. ha $R \sim 10\,\xi_0 \sim 10^{-6}\,m \rightsquigarrow \Delta T_c / T_c \sim 10^{-2}$

$T_c = 10K \rightsquigarrow \Delta T_c \sim 0{,}1\,K$, jól mérhető





Linearizált GL-egyenletek

$$(\mathrm{GL1}) \qquad \alpha|\psi| + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - 2e\underline{A}\right)^2\psi = 0$$

$|\psi| \to 0$ határeset $\quad \left(|\psi|^2 \ll \psi_\infty^2 = -\alpha/\beta\right)$

$\rightsquigarrow$ $\beta|\psi|^2\psi$ tagot elhagyjuk

ilyen fordul elő, ha a nagy mágneses tér miatt $|\psi| \to 0$

$$(*) \qquad \left(-i\nabla - \frac{2\pi}{\phi_0}\underline{A}\right)^2\psi = -\frac{2m^*|\alpha|}{\hbar^2}\psi \equiv \frac{1}{\xi^2}\psi \qquad \frac{2\pi}{\phi_0} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi\hbar}{e}} = \frac{e}{\hbar}$$

További egyszerűsítés: $\underline{A} = \underline{A}_{ext}$, $\underline{j}_s$ keltette teret elhagyjuk $\propto |\psi|^2$

lineáris diff.-egyenletek + peremfeltételek

$(*)$ olyan, mint szabad töltött részecske Sch.-egyenlete mágneses térben

Homogén mágneses tér: $A_y = Bx$, $A_x = A_z = 0$

$$B_z = \partial_x A_y = B, \quad B_x = B_y = 0$$

$$\left[-\nabla^2 + \frac{4\pi i}{\phi_0}Bx\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi B}{\phi_0}\right)x^2\right]\psi = \frac{1}{\xi^2}\psi$$

$$\psi = e^{ik_y y}e^{ik_z z}f(x)$$

$$-f''(x) + \left(\frac{2\pi B}{\phi_0}\right)^2(x-x_0)^2 f = \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right)f$$

$$x_0 = \frac{k_y\phi_0}{2\pi B} \qquad \Big| \times \frac{\hbar^2}{2m^*} \rightsquigarrow \text{Sch.-egyenlet}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\left(\frac{2eB}{m^*}\right)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{1}{\xi^2}-k_z^2\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\,\frac{2eB}{m^*}$$

$$B=\frac{\Phi_0}{2\pi(2n+1)}\left(\frac{1}{\xi^2}-k_z^2\right)$$

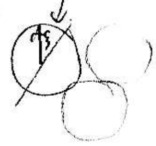
Mi az a legnagyobb tér, amelyben létezik megoldás?

$n=0\,,\ k_z=0$

$$B_{c2}=\frac{\Phi_0}{2\pi\,\xi^2}$$

(~ ξ sugarú körönként 1 fluxus kvantum

vortexek átmérőjének



)

„hullámfv." $f(x)=\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2}\right]$

Hogyan viszonyul B_c-hez? (termodin. kritikus tér)

$$\xi^2=\frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}\qquad |\alpha|=\frac{2e^2}{m}B_c^2\lambda_L^2\ \rightsquigarrow\ \xi=\frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\,B_c\lambda_L}$$

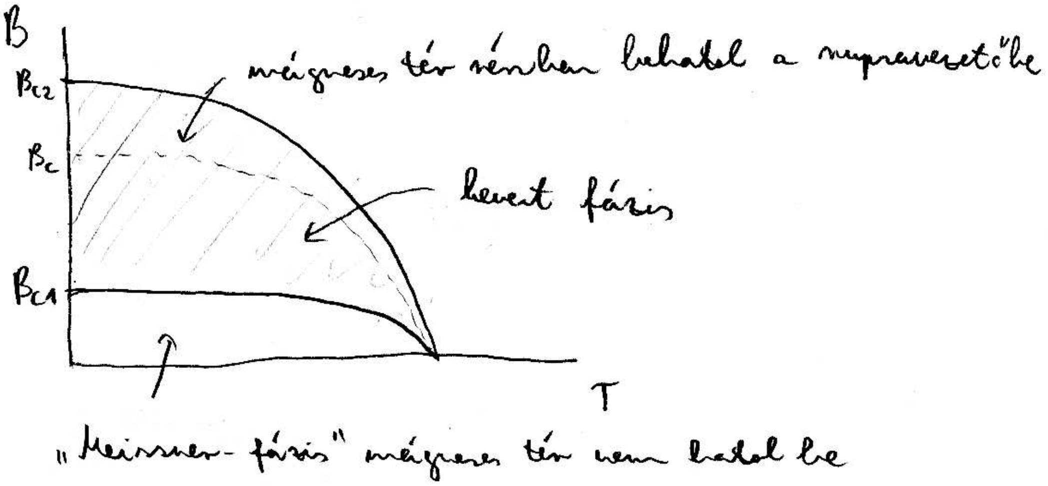
$$\xi^2=\frac{\hbar^2}{4m\frac{2e^2}{m}B_c^2\lambda^2}\qquad \xi=\frac{\hbar}{2\pi\sqrt{2}\,2eB_c\lambda^2}=\frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi B_c\lambda_L}$$

$\kappa=\frac{\lambda}{\xi}$ $\qquad \xi^2=\xi\,\frac{\lambda_L}{\kappa}=\frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\kappa B_c}$

$$\boxed{B_{c2}=\sqrt{2}\,\kappa B_c}$$

II.-fajú szupravezető $\kappa>\frac{1}{\sqrt{2}}\ \rightsquigarrow\ B_{c2}>B_c$

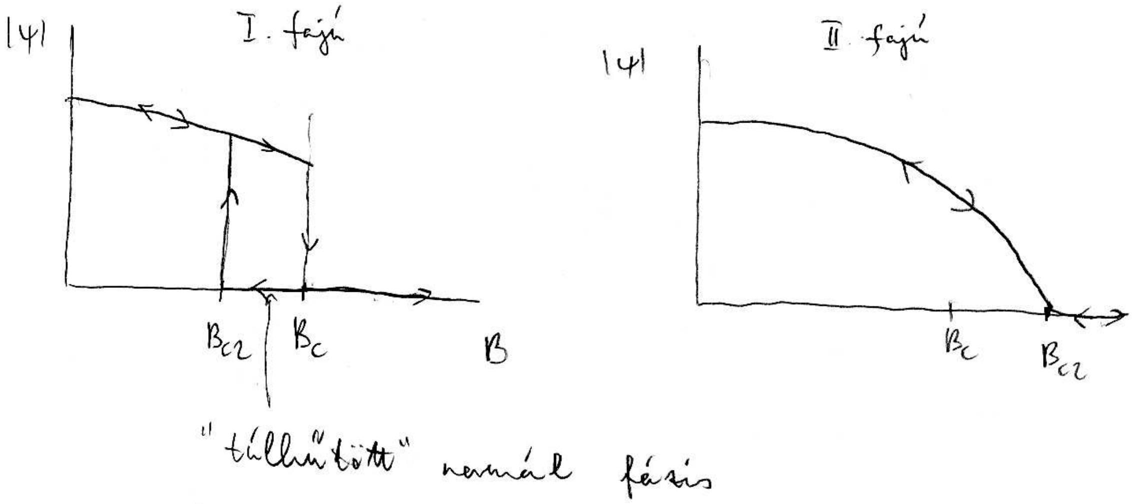
I. fajú: $B_{c2}<B_c$?



Első fajú nupravezetőben: $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow B_{c2} = \sqrt{2}\kappa B_c < B_c$

??? Nincs $|\psi| \to 0$ megoldás ($T < T_c$-re)

$\rightsquigarrow$ elsőrendű fázisátalakulás.



Milyen len a rendparaméter B_{c2} közelében?

$n=0$ oszcillátor hullámfv. $f(x) \propto e^{-(x-x_0)^2/2\xi^2}$ $\quad x_0 = \frac{k_y \Phi_0}{2\pi B_{c2}} = \xi^2 k_y$

$k = k_y$ a továbbiakban

$$\psi_k(x,y) = c\, e^{iky} e^{-(x-x_0)/2\xi^2} \qquad c \to 0, \text{ ha } B \to B_{c2}$$

k szerint erősen degenerált $\rightsquigarrow$ $b|\psi^2|\psi$ nemlin. tag feloldja a degenerációt

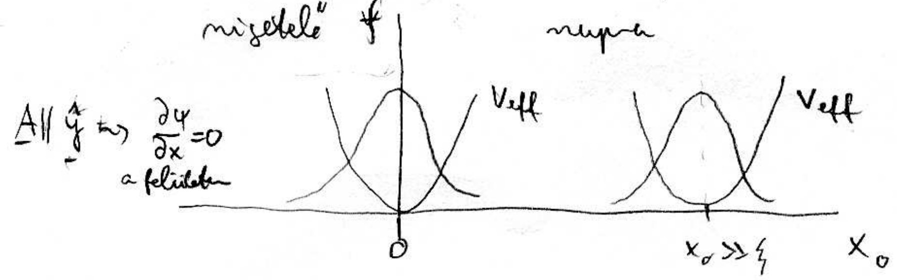
Magképződés a felületen : B_{c3}

(Saint-James, de Gennes, 1963)

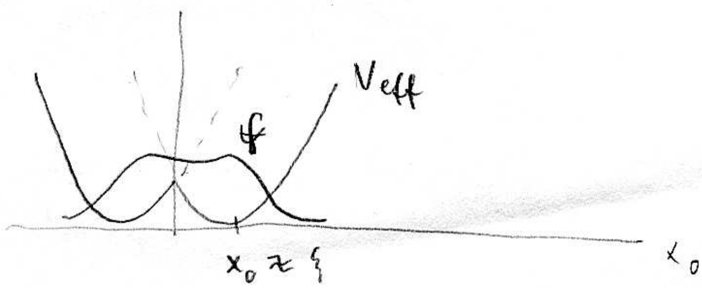
Peremfeltétel szupravezető – szigetelő határfelületen:

$$\left(-i\nabla - \frac{2\pi}{\phi_0}\underline{A}\right)\psi\Big|_n = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{J}_n = 0$$

Az előbb számolt $n=0$, $k_z=0$ megoldások közül jó



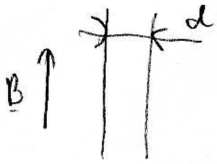
Több megoldás a tükrözés módszerével



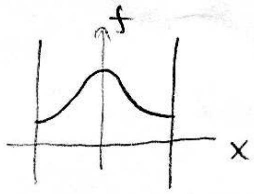
laposabb, mélyebb potenciál, ha $x_0 \approx \xi$ $\rightsquigarrow$ alacsonyabb sajátérték, nagyobb B.

Numerikus eredmény: $B_{c3} = 1{,}695\, B_{c2} = 1{,}695 \cdot \sqrt{2}\, B_c$

Vékony réteg ∥ B térben

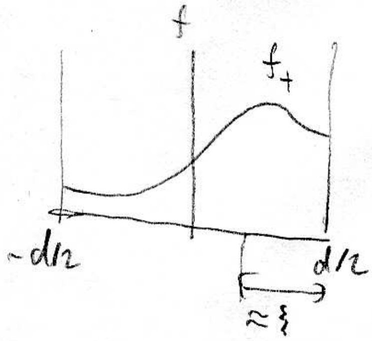


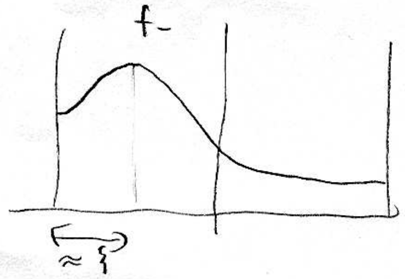
1.) $d \lesssim 1{,}8\,\xi$ ⇝ szimmetrikus megoldás



kicsit magasabb max. tér, mint B_{c2}

2.) $d \gtrsim d_c \approx 1{,}8\xi$ ⇝ megjelennek a Saint-James – de Gennes aszimmetrikus megoldások:





$$\Psi = e^{i k_y y} f(x)$$

degeneráltak "energiában" $a_+ \Psi_+ + a_- \Psi_-$ is ugyanolyan jó

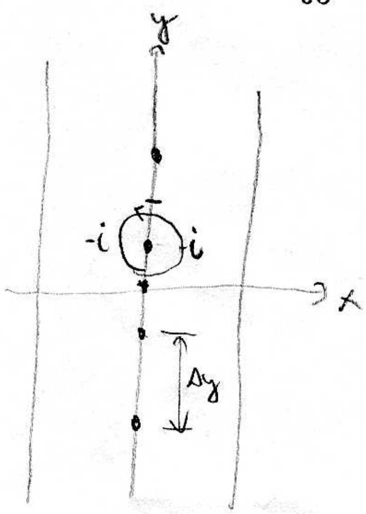
a nemlineáris $\beta |\Psi|^2 \Psi$ tag feloldja a degenerációt

Legalacsonyabb energia:

$$\Psi = \Psi_+ + \Psi_- = e^{i k_y y} f(x) + e^{-i k_y y} f(-x)$$

$$= \cos(k_y y)\,[f(x) + f(-x)] + i \sin(k_y y)\,[f(x) - f(-x)]$$

Nódusok $x=0$ egyenesen, ha $k_y y = \pi/2 + n\pi$



$$\Delta y = \frac{\pi}{k_y} \approx \frac{\Phi_0}{B(d-d_c)}$$

2π-vel változik a fázis, ha körbejárjuk a nódust

$\underline{j} \propto \nabla \varphi$ ⇝ szuperáram folyik a nódus körül "örvény" (vortex)

VR1

Vortexrács $B = B_{c2}$ környékén

$n=0$, $k_z = 0$ megoldás: ($k_y = k$ a továbbiakban)

$$(1) \quad \psi_k(x,y) = C e^{iky} e^{-(x-x_0)^2/2\xi^2} \qquad x_0 = \frac{k\Phi_0}{2\pi B_{c2}} = \xi^2 k$$

$C \to 0$, ha $B \nearrow B_{c2}$

Erősen degenerált $\to$ $b|\psi|^2\psi$ nemlin tag feloldja a degenerációt

Várakozás: periodikus vortexrács

Miért? 1.) Várjuk a $\gamma < 0$ felületi feszültség miatt

2.) Láttuk a kerekség végére

Az oszcillátor hullámfüggvények térben periodikus szuperpozícióit vizsgáljuk.

(1) már eleve periodikus y-ban. Periódus: $b = \frac{2\pi}{k}$

Megtartjuk ezt a periodicitást: nk felharmonikusokat keverünk össze $n \in \mathbb{Z}$

$$\psi(x,y) = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inky} e^{-(x-x_n)^2/2\xi^2}$$

$$x_n = n\xi^2 k = n\frac{2\pi\xi^2}{b} \to x\text{-ben is periodikus}$$

$$a = x_{n+1} - x_n = \frac{2\pi\xi^2}{b} \qquad ab = 2\pi\xi^2 \qquad \Phi = 2\pi\xi^2 \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} = \Phi_0$$

fluxus a rács elemi cellájára

~~Megtartva a~~ tusatz tovább általánosítható

$$(2) \quad \psi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inky} e^{-(x-x_0)^2/2\xi^2}$$

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \quad C_{n+\nu} = C_n$$

VR2

Periódus x irányban $a = \nu(x_{n+1} - x_n) = \nu \xi^2 k$

Periódus y irányban $b = \frac{2\pi}{\nu k}$

$\Big\}$ $ab = 2\pi\xi^2$ továbbá is

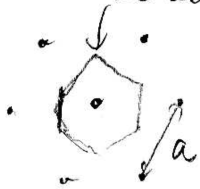
$\nu = 1$ $C_n \equiv C$ = konstans ⇝ négyzetrácsos szimmetria

$\nu = 2$ $C_{n+2} = C_n$ ⇝ C_0, C_1 két paraméter

ha pl. $C_1 = iC_0$ ⇝ szabályos háromszögrács, 1 param: C_0

Numerikusan kiminimalizálhatjuk $F(C) = \int f(C)\, d^3r$ szabadenergiát

Abrikosov, 1953: Δ-rács a legstabilabb



szimmetria okokból a cella határán

$j_s = 0$ ⇝ ~~fluxoidkvantum~~

cellahatáron $\Phi' = \Phi = \Phi_0$

fluxoid fluxus fluxuskvantum

Rácsállandó $a = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{\Phi_0}{B}\right)^{1/2}$

$a^2 B =$ konst

Hogyan mérik? Kísérlet:

1.) Dekoráció ferromágneses porral

2.) Mágneses neutronszórás

3.) Mágneses tér eloszlása NMR-ből v. μSR-ből

4.) STM (vortexmagban lokalizált kvázirészecske állapotok)