KVANTUMKORRELÁCIÓK ÉS REJTETT VÁLTOZÓK

SZALAY SZILÁRD

1. Bevezetés

Klasszikus fizikának nevezzük a kvantum előtti fizikát, és ezzel kapcsolatban az a legizgalmasabb kérdés, hogy mitől nemklasszikus a kvantum. A nemklasszikus viselkedés tettenérésére egyszerű gondolatkísérletek klasszikus leírásának lehetőségét/lehetetlenségét fogjuk tekinteni.

1.1. Klasszikus és kvantum A kvantumelmélet először is egy valószínűségi elmélet, vagyis nem mondja meg, mi lesz egy egyedi mérés kimenetele, csupán azt, hogy a lehetséges kimenetelek mekkora valószínűséggel következnek be. Ettől még persze viselkedhetne teljesen klasszikusan is, viszont ez egy olyan valószínűségi elmélet, ami „hullámzik”. A klasszikus fizikában találkoztunk hullámegyenlettel leírt elméletekkel (mechanikai, hidrodinamikai, elektromágneses hullámok), ezekben a hullámok *lineáris szuperpozícióra* képesek. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet megoldásainak számszorosa (akár negatív is) és összege, különbsége is jó megoldás lesz. A klasszikus fizikában találkozunk valószínűségi elméletekkel is, amikor bizonyos változókat, melyek meghatározzák a mérések kimeneteleit, nem veszünk részletesen figyelembe, általában azért, mert nem ismerjük az értéküket. A valószínűségekre viszont a lineáris szuperpozíció helyett a *konvex kombináció* (súlyozott átlag) lesz a természetes struktúra. A kvantumfizikában a valószínűségek az abszolútérték-négyzetei az úgynevezett valószínűségi amplitúdóknak. Az előbbiek konvex struktúrájához jön az utóbbiak lineáris struktúrája: az amplitúdók lehetnek negatívak (sőt, lehet komplex fázisuk is), és egy hullámegyenletnek, a Schrödinger egyenletnek engedelmeskednek. Ezért lineáris szuperpozícióra képesek, például kioltó interferenciára is. A kvantumelmélet minden furcsasága végső soron ennek az alul megbúvó lineáris struktúrának köszönhető. Az alapkérdés ezzel kapcsolatban az, hogy léteznek-e olyan, klasszikusan viselkedő rejtett változók, melyekhez ugyan nem férünk hozzá, de velük végső soron determinisztikusan (vagy legalább klasszikusan sztochasztikusan) írhatnánk le a mérések kimeneteleit. Nyomós indokaink vannak azt gondolni, hogy a lokalitás feltételezése mellett nem léteznek ilyenek. A 2022 évi fizikai Nobel-díj az ennek a vizsgálatára irányuló kísérleteket jutalmazta.

A cikk célja, hogy minimális eszközökkel világítsa meg a kvantumkorrelációk és a rejtett változók témáját. Ehhez csak valós számokra, a négy alapműveletre és egy kevés klasszikus valószínűségszámításra lesz szükségünk, kvantumelméleti számításokat nem is fogunk végezni. Ennek a megközelítésnek az a hátránya, hogy az említett lineáris struktúrát közvetlenül nem mutatja meg, csupán a következményeivel szembesít. Előnye viszont, hogy egyszerűbb, és bizonyos esetekben kvantumelméletre nem támaszkodó, nagyon erős állításokat tud tenni. Célunk érdekében a főszövegben szigorúan megmaradunk a minimális eszközöknél, a kvantumelméleti formalizmus és fogalmak használata nélkül. A kvantumelméletet ismerők számára fontos magyarázó, kitekintő megjegyzések és irodalmi hivatkozások az utolsó fejezetbe kerültek.

Módszerünk a szokásos „gondolatkísérleti fizika” lesz, klasszikus mennyiségekkel elvégzett gondolatkísérletekkel mutatjuk meg a jelenségeket. A kvantumos viselkedés megjelenítéséhez itt az olvasónak el kell fogadni néhány extra játékszabályt, valamint el kell hinni a kísérletek kvantumelmélettel összhangban lévő eredményeit.

[verzió: 2023. január 24] Megjelenik a Fizikai Szemle LXXIII. évfolyamának 1. számában (2023/01).

1.2. Kísérlet A példa a kísérletre legyen egy doboz, melyből egy lyukon keresztül testek hullanak. Nem tudjuk, hogy ezek micsodák, de végezhetünk méréseket. Kétféle mérhető mennyiség lesz, *szín* és *forma*. A szín lehessen *piros* és *kék*, a forma pedig *kocka* és *gömb*. Legyen sötétség, a forma mérése tapintással történjen, a színé pedig látással úgy, hogy a testek felületét egy keskeny nyalábú zseblámpával igen kis helyen világítják meg, hogy a forma nem tudható meg ez által. Az *első játékszabály* legyen, hogy a kétféle mérés közül csak az egyiket lehet elvégezni. Kiválasztható, hogy melyiket, de a mérés után a test felrobban mondjuk a kezünk vagy a fény hőjétől, és nincs lehetőség a másik mérés elvégzésére ugyanazon a testen. Sok egyedi mérést végezve, véletlenszerűen választva a szín és forma mérése között, az eredmények bekövetkezését megszámolva, ha ezek relatív gyakorisága konvergálni látszik (a fluktuációk megfelelően törpülnek el a mintavételezés számával) akkor ezek jól közelítik határértéküket, a valószínűségeket, és legyen

$$q({\color{red}\divideontimes}) := \frac{N({\color{red}\divideontimes})}{N({\color{red}\divideontimes}) + N({\color{blue}\divideontimes})}, \qquad q({\color{blue}\divideontimes}) := \frac{N({\color{blue}\divideontimes})}{N({\color{red}\divideontimes}) + N({\color{blue}\divideontimes})},$$
$$q(\square) := \frac{N(\square)}{N(\square) + N(\bigcirc)}, \qquad q(\bigcirc) := \frac{N(\bigcirc)}{N(\square) + N(\bigcirc)},$$

értelemszerű jelöléssel. Ezek együttesét *mérési statisztikának* nevezzük. Mivel csak ezek a kísérletileg hozzáférhető mennyiségek, nem is tekintünk mást. Nem tudjuk például a piros kockák $q({\color{red}\blacksquare}) = \frac{N({\color{red}\blacksquare})}{N({\color{red}\blacksquare})+N({\color{red}\bullet})+N({\color{blue}\blacksquare})+N({\color{blue}\bullet})}$ gyakoriságát, mert a benne szereplő mennyiségek játékszabályaink szerint nem mérhetőek, vagy színt, vagy formát mérhetünk. (Nem is biztos, hogy lehet piros kockákról beszélni, de erről majd később. . .) Ugyanezért szokták használni a feltételes jelölést: $q({\color{red}\divideontimes}) \equiv q({\color{red}\divideontimes}|\text{“szín”})$, „piros” kimenetet akkor kaphatunk, ha „színt” mérünk, és így tovább. (Ez ismerős annak, aki ismeri a feltételes valószínűségek fogalmát, de itt elegendő azt látni, hogy mindkét méréshez tartozik egy *eloszlás*, $q({\color{red}\divideontimes}) + q({\color{blue}\divideontimes}) = 1$ és $q(\square) + q(\bigcirc) = 1$.)

A mérési statisztikára általánosan a

$$q(i|x) := \frac{N(i|x)}{\sum_{i'} N(i'|x)}$$

jelölést használjuk, ahol x a mérés típusát tartalmazó *változó*, $x =$ “szín” vagy $x =$ “forma” értékeket vehet fel, i pedig a mérés kimenetelét tartalmazó *változó*, $i = {\color{red}\divideontimes}$ vagy $i = {\color{blue}\divideontimes}$, *ha* a mérés típusa $x =$ “szín”, $i = \square$ vagy $i = \bigcirc$, *ha* a mérés típusa $x =$ “forma”. Nyilván $0 \leq q(i|x)$, és minden x mérésválasztásra $\sum_i q(i|x) = 1$ külön-külön, a definícióból adódóan.

Különbözőképpen viselkedő dobozok létezhetnek, melyek különböző mérési statisztikákat adnak. Ezeket *különbözőképpen preparált dobozoknak* nevezzük. A *második játékszabály* legyen az, hogy a dobozokon van néhány csavar, amiknek az állítgatásával – nem tudjuk, hogyan, de – *az összes olyan preparációt el lehet készíteni, melyek – itt nem részletezett módon – a kvantumelmélettel leírható módon viselkednek.* Ahol szükséges, a $q(i|x, s)$ jelölést használjuk az s preparációbeli mérési statisztikára.

A kísérleteket végrehajtó PhD hallgatókat hagyományosan Alíznak és Bobnak hívjuk (csak ketten lesznek). Fontos megjegyezni, hogy ők csak azért szerepelnek, mert kényelmes rájuk hivatkozni egy mesében, nem gondolunk ilyenkor semmiféle pszichikumra. A mérést előre beállított automaták is végezhetik, és ilyenek is végzik a valódi kísérletekben. Alíz és Bob feladata egyrészt elvégezni a kísérleteket, másrészt nyakon csípni a kvantumos viselkedést: ez akkor sikerül nekik, ha nem lehet klasszikus eszközökkel reprodukálni, szimulálni a mérési statisztikákat.

2. Egy labor

Alíz elvégzi a fent leírt kísérletet egy dobozból kihulló testek szín és forma tulajdonságain. Kipróbál nagyon sok lehetséges preparációt, mindegyikkel elvégzi a mérést, minden testnél véletlenszerűen választ a szín és forma mérése között, és lejegyzi a relatív gyakoriságokat.

2.1. Határozatlanság Alíz azt tapasztalja, hogy akármelyik preparációt használja is, a szín és forma mérése legalább egyikénél mindkét lehetséges értéket megkaphatja a méréssel. Például lehet olyan preparáció, ami után csak kockát ad a forma mérése, de a szín mérése pirosat és kéket is. Lehetnek sokkal zajosabb kimenetek is, ahol mindkét szín és mindkét forma is előfordul. Olyan viszont nem lesz, ahol például a forma mérése mindig kockát ad, a színé pedig mindig pirosat. Ezt nevezzük *határozatlanságnak.* Azt is észreveszi, hogy ha csak az egyik mérést tekinti, akkor bármilyen eloszlást megkaphat valamilyen preparációkra, de ez korlátozást jelent a másik mérés lehetséges eloszlására.

Alízt ez kissé zavarja. Miért ne lehetne a doboz tele piros kockákkal? Klasszikus szemléletével minden esetre azt tételezi fel, hogy mind a szín, mind a forma a testeknek valamilyen fix értékű tulajdonsága, melyet ő csak megmér. Azt gondolja, hogy a mérés megzavarhatja a testet, és elronthatja a mért tulajdonságot. Azt sem látja, hogy ez a mérés általi megzavarás az ő ügyetlensége-e, vagy pedig nem is lehetne jobban mérni. Másrészt az is lehetséges, hogy már a preparáció sem tökéletes.

2.2. Kontextualitás Alíz feltételezi, hogy az egyedi mérés kimenetelét egy λ rejtett változó meghatározza. Azért rejtett, mert nincs rá közvetlen mérés, aminek λ lenne a kimenete. Ilyen rejtett változó lehetne például a testek együttesen létező szín+forma tulajdonsága, $\lambda \in \{{\color{red}\blacksquare}, {\color{red}\bullet}, {\color{blue}\blacksquare}, {\color{blue}\bullet}\}$, de ennél sokkal általánosabb eseteket is meg akar engedni. Lehetséges, hogy az adott s preparáció a rejtett változót nem rögzíti pontosan, csak egy $w(\lambda|s)$ valószínűséggel (nyilván $w(\lambda|s) \geq 0$ és $\sum_\lambda w(\lambda|s) = 1$). Alíz azt kérdezi, vajon lehetséges-e, hogy a rejtett változó megadja a mérés kimenetelét, vagyis fennáll-e a mérési statisztikákra

$$q(i|x,s) = \sum_\lambda w(\lambda|s)p(i|x,\lambda) \tag{1a}$$

bármely s preparációra, x mérésválasztásra és i mérési eredményre. Itt $p(i|x,\lambda)$ valamilyen válaszfüggvény, mely megadja, hogy milyen valószínűséggel kaphatja meg az x mérésre az i kimenetet, ha a rejtett változó λ értéket vesz fel (nyilván $p(i|x,\lambda) \geq 0$ és $\sum_i p(i|x,\lambda) = 1$). Ha $p(i|x,\lambda)$ csak 0 vagy 1 lehet, akkor a rejtett változó pontosan meghatározza a mérés kimenetelét, de Alíz ezt nem követeli meg általában: így figyelembe tud venni számára ismeretlen folyamatokat, preparációs bizonytalanságot ($w(\lambda|s)$-en keresztül), mérési hibát, vagy a mérés megzavaró hatását is ($p(i|x,\lambda)$-n keresztül). Viszont kiró még egy fontos feltételt, ugyanis így (1a) triviálisan teljesül.[1] Magából a konstrukcióból következik ugyanis, hogy ha Alíz $r(k)$ valószínűséggel válogat s_k preparációk közül, (ezt is egy értelmes preparációnak tekinti, és $\bar{s}$-sal jelöli), akkor a mérési statisztika a különböző preparációk statisztikáinak súlyozott átlaga, $q(i|x,\bar{s}) = \sum_k r(k)q(i|x,s_k)$, ami alapján a rejtett változó $\bar{s}$ preparációhoz tartozó súlyai az s_k preparációkhoz tartozó súlyainak ugyanúgy súlyozott átlaga kell, hogy legyen,[2] vagyis

$$w(\lambda|\bar{s}) = \sum_k r(k)w(\lambda|s_k). \tag{1b}$$

Az ilyen, (1) egyenleteknek eleget tevő mérési statisztikákat *(preparációsan) nemkontextuálisnak* nevezik, és ezt tekintik a klasszikus viselkedés egyik fontos szükséges feltételének. Azt jelenti, hogy a preparáció és a mérés elválik, leírhatók klasszikusan, és közöttük valamilyen klasszikusan viselkedő rejtett változó teremt kapcsolatot. Viszont, Alíz nagy meglepetésére, nem lehet a sok

[1] Ez nem egy súlyos állítás, pusztán a valószínűségek ekvivalens felírása, $q(i|x,s) = \sum_\lambda \delta_{\lambda,s} q(i|x,\lambda)$, ahol δ a Kronecker delta ($\delta_{\lambda,s} = 1$ ha $i = \lambda$, különben 0), vagyis a $w(\lambda|s) := \delta_{\lambda,s}$ és $p(i|x,\lambda) := q(i|x,\lambda)$ választás kielégíti az (1a) feltételt.

[2] Az előző lábjegyzet $w(\lambda|s) := \delta_{\lambda,s}$ választása már nem elégíti ki a (1b) feltételt: Kronecker delták átlaga nem lesz Kronecker delta.

különböző preparációra kapott mérési statisztikát ilyen módon leírni, tehát ezek *(preparációsan) kontextuálisak*. (Később konkrét példát mutatunk ilyen esetre.)

Alízt ez nagyon zavarja. Az (1) egyenletek nagyon általános szituációt írnak le. El sem tudja képzelni, hogy hogyan működik egy kísérlet, ami az (1) leírásnak nem felel meg. Fizikailag azt képzeli, hogy a preparáció és a mérés elválik egymástól (például a mérés választását nem befolyásolja rejtett változó), de az (1) egyenletek sérülése azt fejezi ki, hogy a kettő közötti kapcsolatot nem hozhatja létre valamilyen klasszikusan viselkedő rejtett változó (speciálisan olyan sem, ami a testek együttesen létező szín+forma tulajdonságát kódolná, vagyis nem lehet $\lambda \in \{\textcolor{red}{\blacksquare}, \textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{blue}{\blacksquare}, \textcolor{blue}{\bullet}\}$).

Alíz, kissé vonakodva bár, de elfogadja, hogy az (1b) feltételt nem követelheti meg. A továbbiakban a korrelációkat szeretné vizsgálni, és kissé gyengít a feltevésein, kevesebbel is megelégszik. A lényeg számára az, hogy az ilyen méréseket egy $p(i|x)$ *válaszfüggvénnyel* le lehet írni, (amitől semmi mást nem követelünk meg, mint $p(i|x) \geq 0$ és $\sum_i p(i|x) = 1$). Nyilván kvantumos kísérlet esetén

$$p(i|x) \equiv q(i|x),$$

és korlátlanul erős klasszikus számítógéppel bármely ilyen mérési statisztikájú kimenetet tetszőleges pontossággal lehet generálni, tehát ilyen szinten nincs szükség klasszikus fizikán túlmutató elvekre. Fontos látni, hogy Alíz nem csak a mérésben kapott $q(i|x)$ válaszfüggvényeket tudná előállítani, hanem olyanokat is, amik mérésben nem kaphatók meg. Például olyat, ahol a forma mérése mindig kockát ad, a színé pedig mindig pirosat, vagyis $p(\textcolor{red}{\ast}|\text{“szín”}) = p(\square|\text{“forma”}) = 1$, $p(\textcolor{blue}{\ast}|\text{“szín”}) = p(\bigcirc|\text{“forma”}) = 0$, noha nem lesz ennek megfelelő $q(i|x)$ mérési statisztika a laborban.

3. Két labor

A korrelációk vizsgálatához egynél több párhuzamos kísérletet kell tekintenünk. Mondjuk kezdetnek kettőt, és ebben a munkában ennyinél is maradunk. Ennek modellje egy doboz, melynek két szemközti oldalán levő egy-egy nyíláson egyidejűleg hullanak ki test párok, melyek mindkét tagján szín vagy forma mérése végezhető.

3.1. Kísérlet Alíz segítségül hívja Bobot, akivel a doboz egy-egy végén kihulló testeken végezhetik a korábban ismertetett méréseket. Mivel a két mérés adatai közötti kapcsolatot szeretnék vizsgálni, ezért fontos, hogy a doboz két végénél levő egyedi mérések ne befolyásolhassák egymást. Ezért a doboz két végéhez egy-egy csövet illesztenek, melyek jó messzire lévő laborjaikba vezetik a testeket, amik kellően távol vannak egymástól ahhoz, hogy egy fényjelnek se legyen ideje eljutni egyikből a másikba annyi idő alatt, ami egy mérés kiválasztásához és elvégzéséhez szükséges. Ezt úgy mondják, hogy a két egyedi mérés egymástól *térszerűen szeparált*, a relativitáselmélet alapján egyik sem lehet hatással a másikra.

A kísérlet során most nem csak megszámolják a kimeneteket és kiszámítják ezek relatív gyakoriságát, hanem minden egyes körben fel is jegyzik egy táblázatba, hogy melyik mérést választották, és erre melyik kimenetet kapták. Miután elegendő mérést végeztek, összevetik a táblázataikat. Lesznek olyan esetek, amikor mindketten színt mértek, ekkor a négyféle eset számai $N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{red}{\ast})$, $N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{blue}{\ast})$, $N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{red}{\ast})$ és $N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{blue}{\ast})$, melyekből számolt valószínűségek

$$\begin{aligned}
q(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) &:= \frac{N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{red}{\ast})}{N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) + N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{blue}{\ast}) + N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) + N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{blue}{\ast})},\\
q(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{blue}{\ast}) &:= \frac{N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{blue}{\ast})}{N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) + N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{blue}{\ast}) + N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) + N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{blue}{\ast})},\\
q(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) &:= \frac{N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{red}{\ast})}{N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) + N(\textcolor{red}{\ast},\textcolor{blue}{\ast}) + N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{red}{\ast}) + N(\textcolor{blue}{\ast},\textcolor{blue}{\ast})},
\end{aligned}$$

$$q({\color{blue}\circledast},{\color{blue}\circledast}) := \frac{N({\color{blue}\circledast},{\color{blue}\circledast})}{N({\color{red}\circledast},{\color{red}\circledast})+N({\color{red}\circledast},{\color{blue}\circledast})+N({\color{blue}\circledast},{\color{red}\circledast})+N({\color{blue}\circledast},{\color{blue}\circledast})}.$$

Amikor Alíz színt mér, Bob pedig formát, a négyféle eset $N({\color{red}\circledast},\square)$, $N({\color{red}\circledast},\bigcirc)$, $N({\color{blue}\circledast},\square)$, $N({\color{blue}\circledast},\bigcirc)$ számaiból

$$q({\color{red}\circledast},\square) := \frac{N({\color{red}\circledast},\square)}{N({\color{red}\circledast},\square)+N({\color{red}\circledast},\bigcirc)+N({\color{blue}\circledast},\square)+N({\color{blue}\circledast},\bigcirc)},$$
$$\vdots$$

illetve hasonlóan, amikor Alíz formát mér, Bob pedig színt, valamint amikor mindketten formát mérnek, akkor

$$q(\square,{\color{red}\circledast}) := \frac{N(\square,{\color{red}\circledast})}{N(\square,{\color{red}\circledast})+N(\square,{\color{blue}\circledast})+N(\bigcirc,{\color{red}\circledast})+N(\bigcirc,{\color{blue}\circledast})},$$
$$\vdots$$
$$q(\square,\square) := \frac{N(\square,\square)}{N(\square,\square)+N(\square,\bigcirc)+N(\bigcirc,\square)+N(\bigcirc,\bigcirc)},$$
$$\vdots$$

értelemszerűen. Célszerű ezeket az adatokat, az *együttes mérési statisztikát*, táblázatba gyűjteni,

	${\color{red}\circledast}$	${\color{blue}\circledast}$	$\square$	$\bigcirc$
${\color{red}\circledast}$	$q({\color{red}\circledast},{\color{red}\circledast})$	$q({\color{red}\circledast},{\color{blue}\circledast})$	$q({\color{red}\circledast},\square)$	$q({\color{red}\circledast},\bigcirc)$
${\color{blue}\circledast}$	$q({\color{blue}\circledast},{\color{red}\circledast})$	$q({\color{blue}\circledast},{\color{blue}\circledast})$	$q({\color{blue}\circledast},\square)$	$q({\color{blue}\circledast},\bigcirc)$
$\square$	$q(\square,{\color{red}\circledast})$	$q(\square,{\color{blue}\circledast})$	$q(\square,\square)$	$q(\square,\bigcirc)$
$\bigcirc$	$q(\bigcirc,{\color{red}\circledast})$	$q(\bigcirc,{\color{blue}\circledast})$	$q(\bigcirc,\square)$	$q(\bigcirc,\bigcirc)$

ahol soronként Alíz, oszloponként Bob adott mérésválasztásaihoz és kimeneteihez tartozó valószínűségek vannak. Az egy mérés esetéhez hasonlóan, az írást megkönnyítendő, a

$$q(i,j|x,y) = \frac{N(i,j|x,y)}{\sum_{i'j'} N(i',j'|x,y)}$$

jelölést használjuk az együttes mérési statisztikára, ahol x Alíz, y pedig Bob mérésének típusa, i Alíz, j pedig Bob mérésének kimenete.

3.2. Korreláció Lesznek olyan preparációk, ahol Alíz és Bob azt veszik észre, hogy az együttes valószínűségek a két mérésben kapott valószínűségek szorzatai, méghozzá olyanoké, melyek maguk is megkaphatók megfelelően beállított dobozokkal,

$$q({\color{red}\circledast},{\color{red}\circledast}) = q_{\mathrm{A}}({\color{red}\circledast})q_{\mathrm{B}}({\color{red}\circledast}), \qquad q({\color{red}\circledast},{\color{blue}\circledast}) = q_{\mathrm{A}}({\color{red}\circledast})q_{\mathrm{B}}({\color{blue}\circledast}),$$
$$q({\color{blue}\circledast},{\color{red}\circledast}) = q_{\mathrm{A}}({\color{blue}\circledast})q_{\mathrm{B}}({\color{red}\circledast}), \qquad q({\color{blue}\circledast},{\color{blue}\circledast}) = q_{\mathrm{A}}({\color{blue}\circledast})q_{\mathrm{B}}({\color{blue}\circledast}),$$

és hasonlóan a "szín"-"forma", "forma"-"szín", "forma"-"forma" mérésekre. Vagyis általánosan, az együttes mérési statisztika helyi mérési statisztikák szorzata,

$$q(i,j|x,y) = q_{\mathrm{A}}(i|x)q_{\mathrm{B}}(j|y) \qquad \text{bármely } x,y \text{ mérés típusra és } i,j \text{ kimenetre.} \tag{2}$$

Ez azt jelenti, hogy ahelyett, hogy egy közös doboz két végén kieső testeken végeznék a méréseket, Alíz és Bob használhat egy-egy megfelelően preparált saját dobozt, melyeknek semmi közük egymáshoz. Elvégezve a méréseket, és összevetve az eredményeket, így is megkapják a mérési statisztikákat, mivel független események valószínűségei összeszorzódnak. Az ilyen, (2) egyenletnek eleget tevő mérési statisztikákat *korrelálatlannak* nevezik. Lesznek olyan preparációk, melyekből kapott mérési statisztikák nem kaphatók meg így, ezeket *korreláltnak* nevezik.

Alízt és Bobot ez nem zavarja, a klasszikus fizikában is vannak korrelációk ilyen mérések között. A testek a közös forrásban kapcsolatban voltak egymással, nincs még semmi gyanús.

Ezek után Alíz és Bob megpróbálja reprodukálni a korrelált mérési statisztikákat is, vagyis azokat, melyekben (2) nem teljesül. Ehhez kettejük laborja között félúton beindítanak egy véletlenszám-generátort, mely λ véletlenszámokat generál w_λ valószínűséggel ($0 \leq w_\lambda$, $\sum_\lambda w_\lambda = 1$), és ezeket klasszikus csatornán (elektromos, optikai kábelen, legfeljebb fénysebességgel) eljuttatják a mérések helyszínére, hogy ennek felhasználásával saját számítógépeikkel próbálják reprodukálni a mérési statisztikákat. Az olvasó meglepődhet, hogy miért jutna eszébe bárkinek ilyet tenni. Alíznak és Bobnak nyomós oka van rá: tudják, hogy minden együttes eloszlást elő lehet állítani szorzat eloszlások súlyozott átlagával, vagyis $p(i,j) = \sum_\lambda w_\lambda p_{\mathrm{A}}(i|\lambda) p_{\mathrm{B}}(j|\lambda)$, ahol $p_{\mathrm{A}}(i|\lambda), p_{\mathrm{B}}(j|\lambda) \geq 0$ és $\sum_i p_{\mathrm{A}}(i|\lambda) = \sum_j p_{\mathrm{B}}(j|\lambda) = 1$ bármely λ-ra.[3] Vagyis az együttes eloszlások korrelációit mindig meg lehet valósítani egy λ rejtett változó segítségével. Ha ez a rejtett változó lokális, vagyis együtt utazik a testekkel, legfeljebb fénysebességgel, akkor modellezi klasszikus elképzeléseiket a szituációról. Alíz és Bob kérdése most az, hogy működik-e ez a feltételes eloszlásokra is, vagy lesz olyan mérési statisztika, amit így nem lehet megkapni? Ez azért nem nyilvánvaló, mert ekkor nem csak egy adott mérésválasztásra kell tudniuk reprodukálni számítógépeiken a feltételes eloszlásokat, hanem egyszerre mind a 2×2-re úgy, hogy az x, y mérésválasztások nem függhetnek a λ rejtett változótól.

3.3. Összefonódás Lesznek olyan preparációk, ahol Alíz és Bob azt veszik észre, hogy az együttes mérési statisztika megkapható úgy, hogy a közös forrásból kapott λ véletlenszámokkal súlyozott átlagát veszik megfelelően beállított saját dobozokkal kapott mérési statisztikáknak,

$$q(i,j|x,y) = \sum_\lambda w_\lambda q_{\mathrm{A}}(i|x,\lambda) q_{\mathrm{B}}(j|y,\lambda) \quad \text{bármely } x, y \text{ mérés típusra és } i, j \text{ kimenetre.} \tag{3}$$

Ez azt jelenti, hogy ahelyett, hogy egy közös doboz két végén kieső testeken végeznék a méréseket, Alíz és Bob használhat több megfelelően preparált saját dobozt, minden λ-ra, melyeknek semmi közük egymáshoz, és a korrelációt a közös λ rejtett változó valósítja meg. Az ilyen, (3) egyenletnek eleget tevő mérési statisztikákat *szeparálhatónak* nevezik, Viszont nagy meglepetésükre lesznek olyan preparációk, melyekből kapott mérési statisztikák nem kaphatók meg így, ezeket *összefonódottnak* nevezik.[4]

Alízt és Bobot ez kissé zavarja. A szeparálhatóság azt jelenti, hogy amikor megkapják a λ adott értékét, akkor ennek megfelelően állítják be a dobozaikat, és elvégzik a mérést. Tehát egy klasszikus rejtett változó klasszikus kommunikációjával valósították meg a korrelációt korrelálatlan dobozok között. Az összefonódás viszont azt jelenti, hogy vannak olyan korrelációk, melyek így nem valósíthatóak meg. Tehát az ilyen korrelációt mutató kísérletekre nem gondolhatunk egy klasszikus tulajdonság által „klasszikusan összekapcsolt” kísérletekként, hanem ők „kvantumosan összefontak”, innen az elnevezés. Alíz és Bob a továbbiakban kissé gyengítenek a feltevéseiken, és megengedik, hogy egyikük általánosabb válaszfüggvényeket használjon a kísérleti dobozok helyett.

---

[3] Ez sem egy súlyos állítás, pusztán az együttes valószínűségek ekvivalens felírása, amire egy egyszerű példa $p(i,j) = \sum_\lambda \delta_{i,\lambda} p(\lambda, j) = \sum_\lambda \left[\sum_{j'} p(\lambda, j')\right] \left[\delta_{i,\lambda}\right] \left[\frac{p(\lambda,j)}{\sum_{j'} p(\lambda,j')}\right]$, ahol δ a Kronecker delta ($\delta_{i,\lambda} = 1$ ha $i = \lambda$, különben 0), és a szögletes zárójelekben szerepelnek w_λ, p_{A}, p_{B} (a j'-re való összegzés a normálás miatt kellett).

[4] Itt a szeparálhatóságot/összefonódást, valamint később a lokális rejtett állapotúságot/kormányozhatóságot és a lokális rejtett változósságot/Bell-nemlokalitást csak az adott *mérési statisztikára* vezettük be. Ezek rokonságban vannak, de nem azonosak a *kvantumállapotok* esetén bevezetett ilyen nevű korrelációs fogalmakkal, melyekről az utolsó fejezetben beszélünk.

3.4. Kormányozhatóság Lesznek olyan preparációk, ahol Alíz és Bob azt veszik észre, hogy az együttes mérési statisztika megkapható úgy, hogy a közös forrásból kapott λ véletlenszámokkal súlyozott átlagát veszik egyiküknél megfelelően beállított saját dobozokkal, másikuknál pedig valamilyen általános válaszfüggvényekkel kapott mérési statisztikáknak,

$$q(i,j|x,y) = \sum_\lambda w_\lambda q_\mathrm{A}(i|x,\lambda) p_\mathrm{B}(j|y,\lambda) \qquad \text{bármely } x,y \text{ mérés típusra és } i,j \text{ kimenetre,} \tag{4a}$$

vagy

$$q(i,j|x,y) = \sum_\lambda w_\lambda p_\mathrm{A}(i|x,\lambda) q_\mathrm{B}(j|y,\lambda) \qquad \text{bármely } x,y \text{ mérés típusra és } i,j \text{ kimenetre.} \tag{4b}$$

Ez azt jelenti, hogy ahelyett, hogy egy közös doboz két végén kieső testeken végeznék a méréseket, Alíz használhat több megfelelően preparált saját dobozt, Bob pedig megfelelő általános válaszfüggvényt megvalósító számítógépet, minden λ-ra (vagy fordítva), melyeknek semmi közük egymáshoz, és a korrelációt a közös λ rejtett változó valósítja meg. Az ilyen, (4) egyenleteknek eleget tevő mérési statisztikákat *lokális rejtett állapotúnak* nevezik. Viszont már nem annyira nagy meglepetésükre lesznek olyan preparációk, melyekből kapott mérési statisztikák nem kaphatók meg így, ezeket *kormányozhatónak* (steerable) nevezik. (Ezeknek a fogalmaknak az elnevezését nem tudjuk megvilágítani a konkrét kvantumelméleti formalizmus használata nélkül.)

Alízt és Bobot ez kissé jobban zavarja. Az összefonódott korrelációk nem valósíthatók meg lokális kísérleti dobozokkal és lokális rejtett változókkal, a kormányozható megvalósításához pedig nem elég, ha a kísérleti dobozt általánosabb válaszfüggvényt megvalósító számítógépre cserélik az egyik laborban. Alíz és Bob a továbbiakban kissé gyengítenek a feltevéseiken, és megengedik, hogy mindketten általánosabb válaszfüggvényeket használjanak a kísérleti dobozok helyett.

3.5. Bell-nemlokalitás Lesznek olyan preparációk, ahol Alíz és Bob azt veszik észre, hogy az együttes mérési statisztika megkapható úgy, hogy a közös forrásból kapott λ véletlenszámokkal súlyozott átlagát veszik valamilyen általános válaszfüggvényekkel kapott mérési statisztikáknak,

$$q(i,j|x,y) = \sum_\lambda w_\lambda p_\mathrm{A}(i|x,\lambda) p_\mathrm{B}(j|y,\lambda) \qquad \text{bármely } x,y \text{ mérés típusra és } i,j \text{ kimenetre.} \tag{5}$$

Ez azt jelenti, hogy ahelyett, hogy egy közös doboz két végén kieső testeken végeznék a méréseket, használhatnak megfelelő általános válaszfüggvényt megvalósító számítógépet, minden λ-ra, melyeknek semmi közük egymáshoz, és a korrelációt a közös λ rejtett változó valósítja meg. Az ilyen, (5) egyenletnek eleget tevő mérési statisztikákat *lokális rejtett változósnak* nevezik. Viszont nagy meglepetésükre lesznek olyan preparációk, melyekből kapott mérési statisztikák nem kaphatók meg így, ezeket *Bell-nemlokálisnak* nevezik.

Alízt és Bobot ez már nagyon zavarja. Már az összefont és kormányozható korrelációk léte is zavarbaejtő volt, de a klasszikus elképzeléseik keretein belül az (5) lokális rejtettváltozós modell a lehető legáltalánosabb szituációt írja le. El sem tudják képzelni, hogy hogyan működik egy ilyen kísérlet, ami az (5) lokális rejtettváltozós leírásnak nem felel meg. Klasszikusan azt képzelik, hogy a szétrepülő test-párokon végzett mérések, térszerűen szeparáltak lévén, nem befolyásolhatják egymást, de az (5) egyenlet sérülése azt fejezi ki, hogy a kettő közötti kapcsolatot nem hozhatja létre valamilyen klasszikusan viselkedő, lokális rejtett változó (speciálisan olyan sem, ami a testek együttesen létező szín+forma tulajdonságát kódolná, vagyis nem lehet $\lambda \in \{■, ●, ■, ●\}$). Mivel a mérések térszerűen szeparáltak, ez valamiféle „kísérteties távolhatás”. Ekkor vajon tudnának egymásnak fénysebességnél gyorsabban üzenni? Alíz és Bob a továbbiakban ezt szeretné ellenőrizni.

3.6. Nemjelzés A fénysebességnél gyorsabb jelzéshez az kellene, hogy például Alíz mérésválasztása és mérése hatására Bob mérési statisztikája megváltozzon. Ha Alíz az x mérést választja, akkor Bob y mérésének j kimenetének valószínűsége $\sum_i q(i,j|x,y)$ (össze kell adni az összes olyan eset valószínűségét, ahol Bob mérési kimenete j). Lehetséges, hogy ez függ Alíz x mérésválasztásától? Matematikailag lehet ilyeneket konstruálni, de az a kérdés, hogy a mérésekből kapott statisztikák ilyenek-e. Alíz és Bob azt veszik észre, hogy az együttes mérési statisztikákra mindig fennáll

$$\sum_i q(i,j|x,y) = \sum_i q(i,j|x',y) \qquad \text{bármely } x,x',y \text{ mérés típusra és } j \text{ kimenetre,} \tag{6a}$$

és

$$\sum_j q(i,j|x,y) = \sum_j q(i,j|x,y') \qquad \text{bármely } x,y,y' \text{ mérés típusra és } i \text{ kimenetre.} \tag{6b}$$

Ez azt jelenti, hogy a helyi laborok mérési statisztikái nem függenek a másik laborbeli méréstől. Az ilyen, (6) egyenleteknek eleget tevő mérési statisztikákat *nemjelzőnek* (no signalling) nevezik.

Alíz és Bob ettől kissé megnyugszik. Az egyikük mérésválasztásával nem tud a másiknak fénysebességnél gyorsabban üzenni. Bár az (5)-öt sértő, Bell-nemlokális korrelációk léte klasszikus szemléletük számára még mindig érthetetlen.

4. Példák

Hogy az elmélet ne csak a levegőben lógjon, nézzünk néhány példát a klasszikus viselkedés kizárására.

4.1. Preparációs kontextualitás Elsőnek vegyünk egy példát a preparációs kontextualitásra, vagyis az (1) feltételek sérülésére. Alíz észreveszi a különböző preparációkhoz tartozó $q(i|x,s)$ mérési statisztikáin azt az érdekes összefüggést, hogy bármely s preparációhoz lehet találni másik három olyan preparációt, melyekben a szín és forma mérések statisztikái egymáséiból „tükrözéssel" kaphatók ($u \leftrightarrow 1-u$, lásd (7a) táblázatban). Jelöljünk tetszőleges négy ilyen mérési statisztikát megvalósító preparációt $s \in \{1,2,3,4\}$ címkékkel,

(7a)

	1	2	3	4
$\textcolor{red}{\divideontimes}$	u	u	$1-u$	$1-u$
$\textcolor{blue}{\divideontimes}$	$1-u$	$1-u$	u	u
$\square$	v	$1-v$	v	$1-v$
$\bigcirc$	$1-v$	v	$1-v$	v

ahol $0 \leq u,v \leq 1$. Ekkor az is teljesül, hogy ha szabályos pénzfeldobással választ az 1-es és 4-es preparáció között, akkor ugyanazt a mérési statisztikát kapja, mintha ugyanígy válogatna a 2-es és a 3-as között,

$$\frac{1}{2}q(i|x,1) + \frac{1}{2}q(i|x,4) = \frac{1}{2}q(i|x,2) + \frac{1}{2}q(i|x,3). \tag{7b}$$

Másrészt kap olyan mérési statisztikát, ahol

$$u = v = (1 + 1/\sqrt{2})/2. \tag{7c}$$

Hogyan lehetne belátni, hogy az ilyen mérési statisztikákat nem lehet megadni $w(\lambda|s)$ súlyok és $p(i|x,\lambda)$ válaszfüggvények által (1) szerint?

Ehhez először a (1a) egyenletbeli $p(i|x,\lambda)$ válaszfüggvényeket kell megtalálnunk. Az egyik ilyen lehetséges válaszfüggvény a piros kockák esetét visszaadó $p_{\textcolor{red}{\blacksquare}}(\textcolor{red}{\divideontimes}|\text{“szín”}) = 1$, $p_{\textcolor{red}{\blacksquare}}(\textcolor{blue}{\divideontimes}|\text{“szín”}) = 0$, $p_{\textcolor{red}{\blacksquare}}(\square|\text{“forma”}) = 1$, $p_{\textcolor{red}{\blacksquare}}(\bigcirc|\text{“forma”}) = 0$, és hasonlóan elkészíthetőek a piros gömböket, kék kockákat és kék gömböket megadó $p_{\textcolor{red}{\bullet}}$, $p_{\textcolor{blue}{\blacksquare}}$, $p_{\textcolor{blue}{\bullet}}$ válaszfüggvények, melyek felvett értékei a táblázat oszlopaiban találhatóak

(8a)

	$\textcolor{red}{\blacksquare}$	$\textcolor{red}{\bullet}$	$\textcolor{blue}{\blacksquare}$	$\textcolor{blue}{\bullet}$
$\textcolor{red}{\divideontimes}$	1	1	0	0
$\textcolor{blue}{\divideontimes}$	0	0	1	1
$\square$	1	0	1	0
$\bigcirc$	0	1	0	1

Célszerű, mert kifejező, ezeket a speciális válaszfüggvényeket ilyen szimbólumokkal indexelni. Fontos észrevétel, hogy minden lehetséges általános válaszfüggvény ilyenek „súlyozott átlagaként” megkapható, vagyis

$$p(i|x) = w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} p_{\textcolor{red}{\blacksquare}}(i|x) + w_{\textcolor{red}{\bullet}} p_{\textcolor{blue}{\blacksquare}}(i|x) + w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} p_{\textcolor{blue}{\blacksquare}}(i|x) + w_{\textcolor{blue}{\bullet}} p_{\textcolor{blue}{\bullet}}(i|x), \tag{8b}$$

ahol a súlyok $w_{\textcolor{red}{\blacksquare}}, w_{\textcolor{red}{\bullet}}, w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}}, w_{\textcolor{blue}{\bullet}} \geq 0$ és $w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{red}{\bullet}} + w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{blue}{\bullet}} = 1$. Gyakorlásképpen olvassuk le a lehetséges $p(i|x)$ válaszfüggvény értékeit:

(8c)

$\textcolor{red}{\divideontimes}$	$w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{red}{\bullet}}$
$\textcolor{blue}{\divideontimes}$	$w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{blue}{\bullet}}$
$\square$	$w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}}$
$\bigcirc$	$w_{\textcolor{red}{\bullet}} + w_{\textcolor{blue}{\bullet}}$

Mivel így minden válaszfüggvény megkapható, ezért elegendő négyértékű λ rejtett változót használni, és kézenfekvő a rejtett változó értékeinek közvetlenül a válaszfüggvények indexeit használni, $\lambda \in \{\textcolor{red}{\blacksquare}, \textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{blue}{\blacksquare}, \textcolor{blue}{\bullet}\}$,

$$p(i|x, \lambda) := p_\lambda(i|x), \tag{8d}$$

klasszikus elképzeléseinket kifejezendő a testek együttes szín és forma tulajdonságairól. A kevertebb, általános válaszfüggvények (8b) esetét sem hagyjuk ki így, hanem a hozzájuk tartozó átlagolásokat az (1a) egyenletbeli $w(\lambda|s)$ súlyokra hárítjuk át.

Másodszor, az (1a) egyenletbeli $w(\lambda|s)$ súlyokat kell meghatároznunk. Kiderül, hogy ezek lehetséges értékei[5]

(9)

	1	2	3	4
$\textcolor{red}{\blacksquare}$	$w_{\textcolor{red}{\blacksquare}}$	$w_{\textcolor{red}{\bullet}} - \epsilon_1$	$w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} - \epsilon_2$	$w_{\textcolor{blue}{\bullet}} + \epsilon_3$
$\textcolor{red}{\bullet}$	$w_{\textcolor{red}{\bullet}}$	$w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + \epsilon_1$	$w_{\textcolor{blue}{\bullet}} + \epsilon_2$	$w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} - \epsilon_3$
$\textcolor{blue}{\blacksquare}$	$w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}}$	$w_{\textcolor{blue}{\bullet}} + \epsilon_1$	$w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + \epsilon_2$	$w_{\textcolor{red}{\bullet}} - \epsilon_3$
$\textcolor{blue}{\bullet}$	$w_{\textcolor{blue}{\bullet}}$	$w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} - \epsilon_1$	$w_{\textcolor{red}{\bullet}} - \epsilon_2$	$w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + \epsilon_3$

ahol ϵ-ok csak olyan értékeket vehetnek fel, hogy a táblázat minden eleme 0 és 1 közé essen. Például

$$-w_{\textcolor{blue}{\bullet}} \leq \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \leq 1 - w_{\textcolor{blue}{\bullet}}. \tag{10}$$

Figyelembe kell még vennünk, hogy az (1b) feltétel miatt (7b) hatása

$$\frac{1}{2} w(\lambda|1) + \frac{1}{2} w(\lambda|4) = \frac{1}{2} w(\lambda|2) + \frac{1}{2} w(\lambda|3) \tag{11}$$

[5] Például (7a) első és második oszlopából (8c) alapján azt kapjuk, hogy (9) első és második oszlopaiban meg kell egyezni az első két tag, a második két tag, az első és harmadik, valamint a második és negyedik tag összegének. Ezért a $w(\lambda|2) = (w_{\textcolor{red}{\bullet}} + \epsilon, w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + \epsilon', w_{\textcolor{blue}{\bullet}} + \epsilon'', w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} + \epsilon'')$ okos ansatz-cal élve az ϵ változók rögzülnek.

bármely λ-ra, ami (9) oszlopai közötti összefüggés bármely sorára $w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{blue}{\bullet}} = w_{\textcolor{red}{\bullet}} + w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} - (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$, amiből a $w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{blue}{\bullet}} + w_{\textcolor{red}{\bullet}} + w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}} = 1$ normálás miatt

$$2(w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{blue}{\bullet}}) = 1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \leq 1 + 3w_{\textcolor{blue}{\bullet}} \tag{12}$$

adódik, ahol felhasználtuk a (10)-beli alsó korlátot.

Tehát azt kaptuk, hogy tetszőleges s preparációt véve, ha létezik hozzá rejtett változó, melynek súlyai $w(\lambda|s) = (w_{\textcolor{red}{\blacksquare}}, w_{\textcolor{red}{\bullet}}, w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}}, w_{\textcolor{blue}{\bullet}})$ ((9) 1-es oszlopa), akkor, mivel létezik hozzá másik három preparáció (7a) első négy oszlopa szerinti mérési statisztikákkal, az ezeknek megfelelő súlyok között (9) szerinti kényszerek lépnek fel, amik (11) miatt az eredeti $(w_{\textcolor{red}{\blacksquare}}, w_{\textcolor{blue}{\bullet}}, w_{\textcolor{red}{\bullet}}, w_{\textcolor{blue}{\blacksquare}})$ súlyokra adnak kényszert. Ezt kell valahogyan kihasználnunk.

A mérési statisztikából képezzük a

$$Q(s) := q(\textcolor{red}{\divideontimes}|s) - q(\textcolor{blue}{\divideontimes}|s) + q(\square|s) - q(\bigcirc|s)$$

mennyiséget, mely (8c) miatt $Q(s) = 2(w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} - w_{\textcolor{blue}{\bullet}}) = 2(w_{\textcolor{red}{\blacksquare}} + w_{\textcolor{blue}{\bullet}}) - 4w_{\textcolor{blue}{\bullet}}$ lesz, ami (12) miatt

$$Q(s) \leq 1$$

bármely s mérési statisztikára, viszont ha behelyettesíti a (7c) mérési statisztikát, akkor

$$Q = \sqrt{2} > 1,$$

ami ellentmondás. Tehát a (7a), (7c) mérési eredmények nem kaphatók meg (1) nemkontextuális modellből.

4.2. Bell-nemlokalitás Kicsit könnyebb a dolgunk, ha Bell-nemlokálisan korrelált mérési statisztikára szeretnénk venni egy példát, vagyis ami nem kapható meg (5) lokális rejtett változós modellként. Például az egyik szélsőséges esetben Alíz és Bob a következő mérési statisztikát kapják,

(13)

	$\textcolor{red}{\divideontimes}$	$\textcolor{blue}{\divideontimes}$	$\square$	$\bigcirc$
$\textcolor{red}{\divideontimes}$	q_-	q_+	q_-	q_+
$\textcolor{blue}{\divideontimes}$	q_+	q_-	q_+	q_-
$\square$	q_-	q_+	q_+	q_-
$\bigcirc$	q_+	q_-	q_-	q_+

ahol $q_\pm = \big(1 \pm 1/\sqrt{2}\big)/4$.

Hogyan lehetne erről belátni, hogy nem kapható meg lokális rejtett változós (5) modellel?

Vegyük egy kicsit szemügyre, hogy az (5) feltétel milyen mérési statisztikákat enged meg. Alíz és Bob lehetséges teljesen általános (8b) válaszfüggvényeit az előző fejezetben megtaláltuk. Ezekből a helyi válaszfüggvényekből kapható (5) lokális rejtett változós modellel megkapható mérési statisztikák általános alakja (8d) válaszfüggvényekkel

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda w_\lambda p_{\mathrm{A}}(i|x,\lambda)p_{\mathrm{B}}(j|y,\lambda) &= w_{\textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{red}{\blacksquare}}p(i|x,\textcolor{red}{\blacksquare})p(j|y,\textcolor{red}{\blacksquare}) + w_{\textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{red}{\bullet}}p(i|x,\textcolor{red}{\blacksquare})p(j|y,\textcolor{red}{\bullet}) \\
&+ w_{\textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{blue}{\blacksquare}}p(i|x,\textcolor{red}{\blacksquare})p(j|y,\textcolor{blue}{\blacksquare}) + w_{\textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{blue}{\bullet}}p(i|x,\textcolor{red}{\blacksquare})p(j|y,\textcolor{blue}{\bullet}) \\
&\vdots \\
&+ w_{\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\blacksquare}}p(i|x,\textcolor{blue}{\bullet})p(j|y,\textcolor{blue}{\blacksquare}) + w_{\textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}}p(i|x,\textcolor{blue}{\bullet})p(j|y,\textcolor{blue}{\bullet}),
\end{aligned} \tag{14}$$

ahol összesen 16 tag van az összegben, a 4×4 lokális válaszfüggvényhez. (Itt most a rejtett változó értékei a szín+forma tulajdonságok párjai, $\lambda \in \{\textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{red}{\blacksquare}, \textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{red}{\bullet}, \textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{blue}{\blacksquare}, \textcolor{red}{\blacksquare}\textcolor{blue}{\bullet}, \dots, \textcolor{blue}{\bullet}\textcolor{blue}{\bullet}\}$.) Ezek közül mindegyik négyféle méréspárhoz fog 1-et rendelni, amit kissé fárasztó lenne felírogatni, de, köszönhetően az okos címkézésnek, a valószínűségek könnyen leolvashatók. Például az az eset, amikor Alíz szín mérésének kimenete $\textcolor{blue}{\divideontimes}$, Bob forma mérésének kimenete $\square$, akkor fordulhat elő, ha Alíz mérése „kék” válaszfüggvény szerint (ezek $p(i|x,{\color{blue}\blacksquare})$ vagy $p(i|x,{\color{blue}\bullet})$) és Bobé pedig „kocka” válaszfüggvény szerint viselkedik (ezek $p(j|y,{\color{red}\blacksquare})$ vagy $p(j|y,{\color{blue}\blacksquare})$); ennek valószínűsége, vagyis a lokális rejtettváltozós válaszfüggvény (${\color{blue}\divideontimes},\square|$“szín”,“forma”) eleme, a megfelelő szorzat válaszfüggvények súlyainak összege, $w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}$, ami az alábbi táblázat ${\color{blue}\divideontimes}$ sorának és $\square$ oszlopának metszetébe kerül.

(15)

	${\color{red}\divideontimes}$	${\color{blue}\divideontimes}$	$\square$	$\bigcirc$
${\color{red}\divideontimes}$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\bullet}}$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\bullet}}$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\bullet}}$
${\color{blue}\divideontimes}$	$w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\bullet}}$	$w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\bullet}}$	$w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}$	$w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\bullet}}$
$\square$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}$	$w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{blue}\blacksquare}{\color{blue}\bullet}}$
$\bigcirc$	$w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\bullet}}$	$w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\bullet}}$	$w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\blacksquare}}$	$w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{blue}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\bullet}}$

Az a kérdés tehát, hogy találhatunk-e olyan nemnegatív, 1-összegű $w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}},w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\bullet}},\dots,w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\bullet}}$ súlyokat, amikre az iménti táblázat visszaadja a (13) mérési statisztikát. Ez egyáltalán nem tűnik könnyű feladatnak, de szerencsére már megoldották. Legyen Q az a mennyiség, amit úgy kapunk, hogy egy együttes mérési statisztika elemeit megszorozzuk $+1$ és -1-ekkel az alábbi módon

	${\color{red}\divideontimes}$	${\color{blue}\divideontimes}$	$\square$	$\bigcirc$
${\color{red}\divideontimes}$	$+1$	-1	$+1$	-1
${\color{blue}\divideontimes}$	-1	$+1$	-1	$+1$
$\square$	$+1$	-1	-1	$+1$
$\bigcirc$	-1	$+1$	$+1$	-1

és az elemeket összeadjuk. Ha ezt a Q mennyiséget egy lokális rejtett változós modell (15) mérési statisztikájából képezzük, az előjelek úgy játszanak össze, hogy mindegyik w_λ súly kétszer fog szerepelni, vagy mínusz kétszer (kettő ki fog esni a négyből), $Q=2(w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\blacksquare}}+w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{red}\bullet}}+w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\blacksquare}}-w_{{\color{red}\bullet}{\color{red}\bullet}}-w_{{\color{red}\blacksquare}{\color{blue}\blacksquare}}-\dots+w_{{\color{blue}\bullet}{\color{blue}\bullet}})$, amire a

$$-2\leq Q\leq 2$$

korlátok adódnak, mivel a w_λ súlyok nemnegatívak és az összegük 1. Viszont ha ugyanezt a Q mennyiséget képezzük a (13) mérési statisztikából, azt fogjuk kapni, hogy

$$Q=8(q_- - q_+)=-2\sqrt{2}<-2,$$

ami ellentmondás. Tehát a (13) mérési eredmények nem kaphatók meg (5) lokális rejtett változós modellből.

5. Összefoglalás, kitekintés

Áttekintettük a kvantumelmélet alapjainál megbúvó nemklasszikus viselkedés különböző megnyilvánulásait. Ennek során az úgynevezett operácionalista tárgyalást követtünk, melyben a preparációkat „preparációs utasítások” adják meg, a fizikai mennyiségeket pedig „mérési utasítások”, és a vizsgált kérdések azt célozzák, hogy a kísérletekben keletkező mérési statisztikák mögé milyen ontológiai modellek tehetők. Kiderült, hogy a méréseket nem lehet – a klasszikus szemléletünknek megfelelő – nemkontextuális modellel leírni, a korrelációkat pedig nem lehet – a klasszikus szemléletünknek megfelelő – lokális modellel leírni. A tárgyalás során nem használtuk a kvantumelmélet leírásához szükséges fogalmakat, csak a kísérletekben kapott mérési statisztikák tulajdonságait vizsgáltuk. Ennek nagyon fontos következménye, hogy a kontextualitás és a nemlokalitás problémája független a kvantumelmélettől, a valóságos jelenségekben áll fenn. A kvantumelmélet jól írja le a kísérleteket, emiatt kontextuális és nemlokáils.

Szándékosan nem választottunk számértékű (fizikai dimenziós) mérhető mennyiségeket, erre ugyanis nincs szükség a kvantumos viselkedés szemléltetéséhez. Ezért aztán nem is lehet várható értékeket és szórást sem számolni, sem a szokásos formájú határozatlansági, Bell és egyéb egyenlőtlenségeket felírni, de nem is kell. A kvantumosság megragadásához elegendő volt a mérési statisztikát tekinteni, ami így tárgyalható a lehető legletisztultabban. A konkrét szín-forma jelölés pedig a számolásokat teszi könnyen követhetővé.

A további megjegyzések már tartalmazni fognak a kvantumelméleten belüli fogalmakat, és azokhoz szólnak, akik ezeket ismerik.

A kontextualitás modern valószínűségi elmélete [1] megkülönböztet preparációs és mérési kontextualitást. (Lásd még Szabó Gábor kapcsolódó cikkét a Fizikai Szemle 2023 januári számában.) Ezek közül az előbbire tudtunk példát mutatni az előző fejezetben [2] a felvázolt egyszerű kísérleti szituációban (két éles mérés két-két kimenettel), az utóbbihoz már háromféle mérés kellett volna [3], legalábbis nem ismerünk egyszerűbb példát. (A szokásos Kochen-Specker kontextualitás és Mermin négyzet témái [4] is az általános elmélet utóbbi részének speciális esetei.) Fontos megjegyezni, hogy az (1b) feltétel miatt maga a kvantumállapot sem lehet a rejtett változó. (Lásd az első két lábjegyzetet.)

A különböző korrelációfogalmakat is a felvázolt egyszerű kísérleti szituációban vezettük be, emiatt ezek csak az adott konkrét mérések statisztikáinak különböző korrelációira vonatkoznak. A kvantumelmélet keretein belül a megfelelő korrelációs fogalmakat az *összes lehetséges mérésre* nézve definiálják *a kvantumállapotok terén*. Vagyis azt a kérdést teszik fel, hogy ha adott egy kvantumállapot, akkor az vajon megenged-e szeparálható (3), lokális rejtett állapotú (4), vagy lokális rejtett változós (5) leírást *tetszőleges fajta mérésekre*, ami szigorúbb feltétel. Például egy összefont kvantumállapot is vezethet szeparálható mérési statisztikára egy konkrét méréskészlet esetén. Ez pusztán azt jelenti, hogy ezekkel a mérésekkel az állapot összefonódásához „nem lehet hozzáférni", ahhoz más mennyiségek méréseit is meg kellene engedni. Érdekességként megjegyezzük, hogy *matematikailag* konstruálhatók olyan együttes mérési statisztikák is, melyek nem állíthatók elő kvantumos eszközökkel sem [5].

A kvantumállapotok összefonódását [6, 7], Schrödinger-kormányozhatóságát [8, 9], és Bell-nemlokalitását [10, 11] a korrelációk különböző kvantumos aspektusainak értjük. (A Bell-nemlokalitásról lásd még Koniorczyk Mátyás kapcsolódó cikkét a Fizikai Szemle 2023 januári számában..) Mivel a kvantumosan viselkedő rendszerek $q_{\mathrm{A}}(i|x)$, $q_{\mathrm{B}}(j|y)$ válaszfüggvényei speciális esetei az általános $p_{\mathrm{A}}(i|x)$, $p_{\mathrm{B}}(j|y)$ válaszfüggvényeknek, ezért könnyen látható, hogy a szeparálható eset ((3) minden mérésre) mindig lokális rejtett állapotú ((4) minden mérésre), az pedig mindig lokális rejtett változós ((5) minden mérésre). Visszafelé pedig, a Bell-nemlokális mindig kormányozható, ami pedig mindig összefont. (Van még egy korrelációtípus, a diszkord [12], melyet a felvázolt egyszerű kísérleti szituációban nem lehet megfogalmazni. A diszkord ezeknél gyengébb, ami összefont, az mindig diszkordáns.) Ezek a fogalmak úgynevezett tiszta kvantumállapotok esetében egybeesnek, de általában nem: van olyan kvantumállapot, ami lokális rejtett változós, de kormányozható (nem lokális rejtett állapotú), illetve ami lokális rejtett állapotú, de összefont (nem szeparálható). Ahhoz, hogy ezekre példát mutassunk, már konkrét kvantumállapotokat kellene felírnunk, mivel a lehetséges q_{A}, q_{B} dobozokról kellene tudnunk beszélni, ami ennek a cikknek nem célja. Azért tudtunk példát mutatni Bell-nemlokális esetre az előző fejezetben [13], mert a lokális rejtett változós modell (5) definíciójában csak a lehetséges p_{A}, p_{B} klasszikus válaszfüggvényekről kellett beszélnünk. Ezt *eszközfüggetlenségnek* nevezik. A példát a Clauser-Horne-Shimony-Holt egyenlőtlenség adta [13], mely a Bell egyenlőtlenségek egy esete. Általánosan Bell egyenlőtlenségnek nevezzük az (5) lokális rejtett változós modellel leírható mérési statisztikák elemei közötti egyenlőtlenségeket. A 2022 évi fizikai Nobel-díj ez egyenlőtlenség sérülésének kísérleti kimutatását jutalmazta. (Bővebben lásd Asbóth János cikkét a Fizikai Szemle 2022 novemberi számában.)

Köszönöm Szabó Gábornak, Vecsernyés Péternek és Koniorczyk Mátyásnak a kézirat átolvasását és értékes megjegyzéseiket. A kutatómunka anyagi finanszírozásáért köszönet illeti a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Hivatal NKFIH-K134983, NKFIH-KKP133827 számú projektjeit, Kvantumtechnológia Nemzeti Kiválósági

Programját (2017-1.2.1-NKP-2017-00001 „HunQuTech”) Kvantuminformáció Nemzeti Laboratórium programját; a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János Kutatási Ösztöndíját és a Lendület programját és az Emberi Erőforrások Minisztériumának Új Nemzeti Kiválóság Programját (ÚNKP-18-4-BME-389, ÚNKP-19-4-BME-86 and ÚNKP-20-5-BME-26).

Hivatkozások

[1] Robert W. Spekkens. Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements. *Phys. Rev. A*, 71:052108, May 2005. doi: 10.1103/PhysRevA.71.052108. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.052108.

[2] Lorenzo Catani, Matthew Leifer, Giovanni Scala, David Schmid, and Robert W. Spekkens. What is nonclassical about uncertainty relations? *arXiv*, 2207.11779 [quant-ph], Jul 2022. doi: 10.48550/arXiv.2207.11779. URL https://arxiv.org/abs/2207.11779.

[3] Michael D. Mazurek, Matthew F. Pusey, Ravi Kunjwal, Kevin J. Resch, and Robert W. Spekkens. An experimental test of noncontextuality without unphysical idealizations. *Nature Communications*, 7(1), Jun 2016. doi: 10.1038/ncomms11780. URL https://doi.org/10.1038/ncomms11780.

[4] Costantino Budroni, Adán Cabello, Otfried Gühne, Matthias Kleinmann, and Jan-Åke Larsson. Kochen-specker contextuality. *Rev. Mod. Phys.*, 94:045007, Dec 2022. doi: 10.1103/RevModPhys.94.045007. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.94.045007.

[5] Sandu Popescu and Daniel Rohrlich. Quantum nonlocality as an axiom. *Foundations of Physics*, 24:379–385, Mar 1994. doi: 10.1007/BF02058098. URL https://doi.org/10.1007/BF02058098.

[6] Reinhard F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40(8):4277–4281, Oct 1989. doi: 10.1103/PhysRevA.40.4277. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.4277.

[7] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Jun 2009. doi: 10.1103/RevModPhys.81.865. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865.

[8] Howard M. Wiseman, Steven J. Jones, and Andrew C. Doherty. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Phys. Rev. Lett.*, 98:140402, Apr 2007. doi: 10.1103/PhysRevLett.98.140402. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.140402.

[9] Roope Uola, Ana C. S. Costa, H. Chau Nguyen, and Otfried Gühne. Quantum steering. *Rev. Mod. Phys.*, 92:015001, Mar 2020. doi: 10.1103/RevModPhys.92.015001. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.92.015001.

[10] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, Nov 1964. doi: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.

[11] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86:419–478, Apr 2014. doi: 10.1103/RevModPhys.86.419. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.419.

[12] Kavan Modi, Aharon Brodutch, Hugo Cable, Tomasz Paterek, and Vlatko Vedral. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Rev. Mod. Phys.*, 84:1655–1707, Nov 2012. doi: 10.1103/RevModPhys.84.1655. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.1655.

[13] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 24:549–549, Mar 1970. doi: 10.1103/PhysRevLett.24.549. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.24.549.

E-mail: szalay.szilard@wigner.hu

Erősen Korrelált Rendszerek „Lendület” kutatócsoport, Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33

Elméleti Fizika Tanszék és EHU Quantum Center (EHUQC) Baszkföldi Egyetem, E-48080 Bilbao, Spanyolország, PO Box 644