A valós struktúra sajátalterei $\mathcal{S}^m\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{S}^n\mathbb{C}^2$ téren – (házi feladat, harmadik verzió)

– Szalay Szilárd –

2010. május 5.

Tartalomjegyzék

Előzetes megjegyzések

(Apró javítások a 2008. szeptember 5.-ei változathoz képest.) Sokat törtem a fejem a feladaton, ami eléggé letisztult ahhoz képest, amit nyár elején hétfőn mondtam. Az a lényeg, hogy el kell különíteni a következő kérdéseket:

- mi a konjugálás definíciója, és mikor értelmes,
- az eszerint valós altér mikor lesz nemtriviális,
- ez zárt lesz-e az SU(2)-hatásra.

Az derül ki, hogy $\mathcal{S}^m\mathbb{C}^2$ és $\mathcal{S}^m\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{S}^{m'}\mathbb{C}^2$ esetben is az a lényeg, hogy legyen egy megfelelő konjugálás. (Ez függ össze m és m' párosságával / páratlanságával.) Ha ez megvan, akkor általánosan bizonyítható, hogy az eszerint valós és képzetes alterek zártak lesznek az SU(2)-hatásra. Sőt, olyannyira általánosan bizonyítható a zártság, hogy nem is kellett kiírnom a valós polinomokat, amit hétfőn javasoltál.

1. $\mathcal{S}^m\mathbb{C}^2$ eset páros m-re

1.1. Definíciók

Legyen $V = \mathbb{C}^2$ vektortér. $\mathbb{C}$ feletti kétváltozós homogén m-edfokú polinomok tere V m-szeres szimmetrikus tenzorhatványa: $\mathcal{S}^mV$, $\dim\mathcal{S}^mV = m+1$.

$$P_m(x,y) \in \mathcal{S}^mV, \qquad P_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k y^{m-k}. \tag{1}$$

Jelöljük:

$$x, y \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = z \in V. \tag{2}$$

A homogén m-edfokú polinomok fontos tulajdonsága:

$$\forall c \in \mathbb{C}: \qquad P_m(cz) = c^m P_m(z). \tag{3}$$

1.2. Valós struktúra

$\mathcal{S}^mV$ vektortéren megadható valós struktúra az alábbi konjugálási művelettel, ha $m \in 2\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tau_m \quad &: \quad \mathcal{S}^mV \longrightarrow \mathcal{S}^mV, \\ \tau_m P_m(x,y) &= \overline{P_m(-\overline{y},\overline{x})} \end{aligned} \tag{4}$$

amire:

$$\tau_m^2 P_m(x,y) = P_m(-x,-y) = (-)^m P_m(x,y) \tag{5}$$

ahol a valós struktúra tulajdonsághoz szükséges utolsó egyenlőség (3) miatt csak páros m-re teljesül.

Megjegyzés: a konjugálást definiálhatnánk $-\tau_m$-mel is, ahogy órán felírtad. Ha van egy τ konjugálás, akkor annak -1-szerese is jó konjugálás, csak éppen a $-\tau$ szerint való valós altér megegyezik a τ szerinti képzetessel, és fordítva. ($\tau R = R$, akkor $-(\tau R) = -R = (-\tau)R$). Köszönhetően annak, hogy minden lineáris, megnézhető, hogy nem csak a konjugálás lesz ugyanúgy jó bármelyik előjelnél, de az SU(2)*-hatásra vonatkozó állítás is!*

1.3. Valós polinomok

Vizsgáljuk az (4) szerint valós polinomok valós-lineáris alterét! Ennek egy tetszőleges elemét jelöljük $R_m(x,y)$-nal:

$$R_m(x,y) = \overline{R_m(-\overline{y}, \overline{x})} \tag{6}$$

Erre fennáll:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k y^{m-k} &= \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k (-\overline{y})^k \overline{x}^{m-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-)^k \overline{a}_k y^k x^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-)^{m-k} \overline{a}_{m-k} x^k y^{m-k} \end{aligned} \tag{7}$$

amiből az együtthatókra a következő adódik:

$$a_k = (-)^{m-k} \overline{a}_{m-k}. \tag{8}$$

Ekkor igaz az is, hogy $a_{m-k} = (-)^k \overline{a}_k$. Ezt, és az előzőt összevetve:

$$a_k = (-)^m a_k. \tag{9}$$

Az ilyen tulajdonságú vektorok csak páros m-re adnak triviálistól eltérő alteret, ahogy (4) is csak ekkor konjugálás.

A valós polinomok alterében (8) segítségével választhatunk szépen kinéző polinomokat bázisnak, de a továbbiakhoz nem lesz erre szükség.

1.4. SU(2) ábrázolása

SU(2) irreducibilis ábrázolása $\mathcal{S}^m V$-n:

$$\begin{aligned} &\forall q = \begin{bmatrix} \overline{u} & -v \\ \overline{v} & u \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2), \qquad u, v \in \mathbb{C}, \quad |u|^2 + |v|^2 = 1, \\ &\forall m \in \mathbb{N}: \qquad \varrho_m: \quad \mathrm{SU}(2) \times \mathcal{S}^m V \longrightarrow \mathcal{S}^m V \\ &\qquad\qquad\qquad \varrho_m(q) P_m(z) = P_m(q^{-1} z). \end{aligned} \tag{10}$$

1.5. A valós altér SU(2)-invarianciájáról

Állítás: A (4) szerint valós polinomok altere zárt a (10) szerinti SU(2) hatásra.
Bizonyítás: A (6) feltétel valós-lineáris, így azt kell belátnunk, hogy SU(2) hatása egy valós polinomon valós polinomot ad. Tehát legyen

$$\begin{aligned} R_m(x,y) &= \sum_{k=0}^{m} a_k x^k y^{m-k}, \\ \varrho_m(q) R_m(x,y) &= \sum_{k=0}^{m} b_k x^k y^{m-k}, \end{aligned} \tag{11}$$

ekkor kell belátni, (8), hogy

$$\begin{gathered} a_k = (-)^{m-k} \overline{a}_{m-k} \\ \Downarrow \\ b_k = (-)^{m-k} \overline{b}_{m-k}. \end{gathered} \tag{12}$$

Írjuk fel a transzformált polinom együtthatóit:

$$\varrho_m(q) R_m(x,y) = R_m(ux + vy, -\overline{v}x + \overline{u}y) \tag{13}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k (ux + vy)^k (-\overline{v}x + \overline{u}y)^{m-k} \tag{14}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (ux)^i (vy)^{k-i} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} (-\overline{v}x)^j (\overline{u}y)^{m-k-j} \tag{15}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j} u^i \overline{u}^{m-k-j} v^{k-i} (-\overline{v})^j x^{i+j} y^{m-(i+j)} \tag{16}$$

$$= \sum_{f=0}^{m} b_f x^f y^{m-f} \tag{17}$$

ahol (16) együtthatóit a szokásos bázisban egy Kronecker-δ választja ki ($f := i + j$) az összetett szummákból:

$$b_f = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j} u^i \overline{u}^{m-k-j} v^{k-i} (-\overline{v})^j \delta_{i+j,f}. \tag{18}$$

Ennek kell megegyeznie $(-)^{m-f} \overline{b}_{m-f}$-nel:

$$\begin{aligned} &(-)^{m-f} \overline{b}_{m-f} = \\ &= (-)^{m-f} \sum_{k=0}^{m} \overline{a}_k \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j} u^{m-k-j} \overline{u}^i (-v)^j \overline{v}^{k-i} \delta_{i+j,m-f}. \end{aligned} \tag{19}$$

Hajtsuk végre a $i \leftrightarrow k-i$ és $j \leftrightarrow m-k-j$ indexcseréket a belső szummák után: (ez a két binomiális tétel fordított felösszegzését jelenti)

$$= (-)^{m-f} \sum_{k=0}^{m} \overline{a}_k \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j} u^j \overline{u}^{k-i} (-v)^{m-k-j} \overline{v}^i \delta_{m-i-j,m-f}. \tag{20}$$

Használjuk fel, hogy $\delta_{m-i-j,m-f} = \delta_{i+j,f}$, valamint végezzük el a következő szimultán indexcserét: $k, i \leftrightarrow m-k, j$: (ez az eredeti polinom fordított sorrendű összegzését jelenti)

$$= (-)^{m-f} \sum_{k=0}^{m} \overline{a}_{m-k} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j} u^i \overline{u}^{m-k-j} (-v)^{k-i} \overline{v}^j \delta_{i+j,f}. \tag{21}$$

Már csak a minuszjeleket kell helyrepakolni. Valóban, mivel

$$(-v)^{k-i} \overline{v}^j = (-)^{k-i} (-)^j v^{k-i} (-\overline{v})^j \tag{22}$$

ezért

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{m} (-)^{m-f+k-i+j} \overline{a}_{m-k} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j} u^i \overline{u}^{m-k-j} v^{k-i} (-\overline{v})^j \delta_{i+j,f} \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-)^{m-k} \overline{a}_{m-k} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i} \binom{m-k}{j} u^i \overline{u}^{m-k-j} v^{k-i} (-\overline{v})^j \delta_{i+j,f}. \end{aligned} \tag{23}$$

Igen, ha az eredeti polinom valós volt, ahogy azt (8) mutatja, akkor a fentit összevetve (18)-cal:

$$(-)^{m-f} \overline{b}_{m-f} = b_f \tag{24}$$

$\mathcal{Q.E.D.}$

1.6. Egy másik bizonyítás

Ez az a bizonyítás, amit én eredetileg akartam csinálni, csak akkor nem sikerült, valamit biztos elkúrtam, mint honatyáink. Sokkal frappánsabb, mint az előző alfejezetben látott polinomos-binomiálistételes-szummázós őrület.

Írjuk fel a (4) konjugálás operátorát formálisan:

$$\tau_m P_m(x,y) = \overline{P_m(-\overline{y}, \overline{x})} = \overline{P}_m(-y, x) = \overline{P}_m(\varepsilon^{-1} z). \tag{25}$$

ahol

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$\varepsilon^2 = -I, \tag{27}$$

$$\varepsilon^{-1} = -\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Ennek a mátrixnak van egy nagyon furfangos felhasználása: (ezen múlik ez a fajta bizonyítás, meg még egy rakás egyéb dolog) könnyen ellenőrizhető, hogy bármely 2×2-es M mátrix adjungáltja előállítható ε segítségével a következőképpen:

$$-\varepsilon M^T \varepsilon = \mathrm{adj}(M) = \det(M) M^{-1}. \tag{29}$$

Ekkor például egy $q \in \mathrm{SU}(2)$ mátrixnál

$$q^T \varepsilon = \varepsilon q^{-1}. \tag{30}$$

ε-t felhasználva írhatjuk τ konjugálás operátorát:

$$\tau_m = \varrho_m(\varepsilon)\hat{\mathcal{C}}, \tag{31}$$

ahol $\hat{\mathcal{C}}$ jelöli a komplex konjugálást a polinomok terén, mint vektortéren. Tehát csak az együtthatókat konjugálja, a bázist nem. A konjugálás egy vektortéren bázisfüggő művelet, de ez nem okoz gondot, mert végig a standard bázisban dolgozunk, amit (1) definiál.

Most tehát az kell, hogy ha egy polinom valós, akkor az SU(2)-transzformáltja is valós legyen: $\varrho_m(q)\tau_m R_m(z) = \varrho_m(q) R_m(z) = \tau_m \varrho_m(q) R_m(z)$. Tehát Állítás:

$$\forall q \in \mathrm{SU}(2): \qquad [\tau_m, \varrho_m(q)] = 0. \tag{32}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \tau_m \varrho_m(q) &= \varrho_m(\varepsilon)\hat{\mathcal{C}}\varrho_m(q) && (33)\\ &= \varrho_m(\varepsilon)\varrho_m(\overline{q})\hat{\mathcal{C}} && (34)\\ &= \varrho_m(\varepsilon\overline{q})\hat{\mathcal{C}} && (35)\\ &= \varrho_m(q\varepsilon)\hat{\mathcal{C}} && (36)\\ &= \varrho_m(q)\varrho_m(\varepsilon)\hat{\mathcal{C}} = \varrho_m(q)\tau_m. && (37) \end{aligned}$$

ahol (34)-nél kihasználtuk, hogy nyilván $\overline{\varrho_m(q)} = \varrho_m(\overline{q})$, hiszen $\varrho_m(q)$ mátrix elemei az eredeti q mátrix elemeinek m tényezős szorzatainak valós lineárkombinációi, (ahogy az (18)-ból is leolvasható) (36)-nál pedig, hogy egy $q \in \mathrm{SU}(2)$ mátrixra $\overline{q} = (q^\dagger)^T = (q^{-1})^T$ és használható (30). $\mathcal{Q.E.D.}$

Megjegyzés: Tehát találtunk egy operátort, ami felcserélhető egy irreducibilis ábrázolás minden elemével, és mégsem arányos az identitással! Nem mond ez ellent a Schur-lemmának? Nem, mert a Schur lemma komplex-lineáris leképezésekre vonatkozik, míg a konjugálás nyilván konjugált-lineáris.

Megjegyzés: Ez a bizonyítás működik általános $m \in \mathbb{N}$ esetén. Ez nem baj, de hozzá kell tenni, hogy páratlan m-re a valós altér nulla dimenziós. Ehhez felhasználható a (6)-(9) következtetés, de bizonyítható a $\tau_m R_m = R_m$ homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának determinánsával is, mely nulla, ha m páros.

2. $\mathcal{S}^m\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{S}^{m'}\mathbb{C}^2$ eset

Az előző fejezetben leírt gondolatmenet általánosítása akkor működik, ha $m+m' \in 2\mathbb{N}$. Ha külön-külön m és $m' \in 2\mathbb{N}$, *(továbbiakban „páros eset")* akkor a két tenzorszorzattéren egymástól függetlenül eljátszható az előző fejezet konstrukciója, vagyis $\tau_{mm'} = \tau_m \otimes \tau_{m'}$, a valós alterek előállnak külön-külön a két téren, és ezek az előző fejezet szerint zártak lesznek SU(2) hatásra. Azonban ennél több is elmondható: meg fogjuk látni, hogy ha m és $m' \in 2\mathbb{N}+1$, *(továbbiakban „páratlan eset")* akkor is belátható az SU(2)-zártság. Nézzük tehát!

2.1. Definíciók

$\mathcal{S}^m V \otimes \mathcal{S}^{m'} V'$ az olyan $\mathbb{C}$ feletti négyváltozós polinomok tere, melyek az első két változóban homogén m-ed fokúak, a második kettőben pedig homogén m'-ed fokúak

$$\begin{aligned} &P_{mm'}(x,y,x',y') \in \mathcal{S}^m V \otimes \mathcal{S}^{m'} V', \\ &P_{mm'}(x,y,x',y') = \sum_{k=0}^{m} \sum_{k'=0}^{m'} a_{kk'} x^k y^{m-k} x'^{k'} y'^{m'-k'}. \end{aligned} \tag{38}$$

Egy ilyen polinomra általában

$$P_{mm'}(x,y,x',y') \neq P_m(x,y) \otimes P_{m'}(x',y'), \tag{39}$$

ahol $P_m(x,y) \in \mathcal{S}^m V$, $P_{m'}(x',y') \in \mathcal{S}^{m'} V'$. Ez az együtthatók szintjén:

$$a_{kk'} \neq a_k a'_{k'}. \tag{40}$$

Kkvantumösszefonódásos nyelvet használva az ilyen polinomot fogom *összefontnak* nevezni, melynek ellentéte pedig a *szeparálható*. Jelöljük:

$$x, y \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = z \in V, \qquad x', y' \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = z' \in V'. \tag{41}$$

A fenti polinomok fontos tulajdonsága:

$$\forall c, c' \in \mathbb{C}: \qquad P_{mm'}(cz, c'z') = c^m c'^{m'} P_{mm'}(z, z'). \tag{42}$$

2.2. Valós struktúra

Az állítás az, hogy a következő $\tau_{mm'}$ komplex konjugálás működni fog páratlan esetben is:

$$\begin{aligned} \tau_{mm'} = \tau_m \otimes \tau_{m'} \quad : \quad & \mathcal{S}^m V \otimes \mathcal{S}^{m'} V' \longrightarrow \mathcal{S}^m V \otimes \mathcal{S}^{m'} V', \\ \tau_{mm'} P_{mm'}(x, y, x', y') = & \overline{P_{mm'}(-\overline{y}, \overline{x}, -\overline{y}', \overline{x}')}, \end{aligned} \tag{43}$$

ahol τ a (4)-ban definiált konjugálás. Ekkor

$$\begin{aligned} &\tau^2_{mm'} P_{mm'}(x, y, x', y') = \\ &\qquad P_{mm'}(-x, -y, -x', -y') = (-)^{m+m'} P_{mm'}(x, y, x', y'). \end{aligned} \tag{44}$$

Ahhoz, hogy ez a (43) konjugálás legyen, csak az kell, hogy $m + m'$ legyen páros, külön-külön nem kell párosnak lenniük.

Az, hogy (43) tenzorszorzat alakú, azt jelenti, hogy elemi tenzorok konjugáltja is elemi tenzor lesz:

$$\begin{aligned} \tau_{mm'} P_m(x, y) \otimes P_{m'}(x', y') &= \tau_m P_m(x, y) \otimes \tau_{m'} P_{m'}(x', y') \\ &= \overline{P_m(-\overline{y}, \overline{x})} \otimes \overline{P_{m'}(-\overline{y}', \overline{x}')} \end{aligned} \tag{45}$$

Ezen is látszik, hogy maga a konjugálás nem tér el a korábbi sémától. A lényegi különbség a valós altér meghatározásakor kerül elő.

2.3. Valós polinomok

Vizsgáljuk most a (43) szerint valós polinomok alterét! Nem tehetjük fel, hogy a valós polinomok tenzorszorzat-alakba írhatóak, amit (40) fejez ki. Jelöljünk egy ilyen összefonódott valós polinomot $R_{mm'}(x, y, x', y')$-vel:

$$R_{mm'}(x, y, x', y') = \overline{R_{mm'}(-\overline{y}, \overline{x}, -\overline{y}', \overline{x}')} \tag{46}$$

Erre fennáll:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m} \sum_{k'=0}^{m'} a_{kk'} x^k y^{m-k} x'^{k'} y'^{m'-k'} \\ &\quad = \overline{\sum_{k=0}^{m} \sum_{k'=0}^{m'} a_{kk'} (-\overline{y})^k \overline{x}^{m-k} (-\overline{y}')^{k'} \overline{x}'^{m'-k'}} \\ &\quad = \sum_{k=0}^{m} \sum_{k'=0}^{m'} (-)^{k+k'} \overline{a}_{kk'} y^k x^{m-k} y'^{k'} x'^{m'-k'} \\ &\quad = \sum_{k=0}^{m} \sum_{k'=0}^{m'} (-)^{m-k} (-)^{m'-k'} \overline{a}_{m-k,m'-k'} x^k y^{m-k} x'^{k'} y'^{m'-k'} \end{aligned} \tag{47}$$

amiből az együtthatókra a következő adódik:

$$a_{kk'} = (-)^{m-k}(-)^{m'-k'}\overline{a}_{m-k,m'-k'}. \tag{48}$$

Ekkor igaz az is, hogy $a_{m-k,m'-k'} = (-)^k(-)^{k'}\overline{a}_{kk'}$. Ezt, és az előzőt összevetve:

$$a_{kk'} = (-)^{m+m'}a_{kk'}. \tag{49}$$

Az ilyen tulajdonságú vektorok csak páros $m+m'$-re adnak triviálistól eltérő alteret, ahogy (43) is csak ekkor konjugálás.

A valós polinomok alterében választhatunk szépen kinéző polinomokat bázisnak, de a továbbiakhoz nem lesz erre szükség.

Járjuk körbe egy kicsit a szeparálhatóság kérdését, mert ez vezet el oda, hogy megérthessük, mi a különbség a páros, illetve páratlan eset között! A páros esetben a két szorzattéren külön-külön van valós altér, ha veszünk ezekből egy-egy elemet, ezek tenzorszorzata nyilván szeparálható, viszont az ilyenek tetszőleges valós lineárkombinációja, ami a szorzattér valós alterének eleme, nyilván nem lesz szeparálható. Annyit tudunk tehát, hogy *a páros esetben léteznek szeparálható valós polinomok.* Mit tudunk a páratlan esetről?

Nézzük általánosan, milyenek a szeparálható valós vektorok: Legyen $a_{kk'} = a_k a'_{k'}$, ekkor a (47) számítás szerint a valós polinomok (48) tulajdonsága: $a_k a'_{k'} = (-)^{m-k}(-)^{m'-k'}\overline{a}_{m-k}\overline{a}'_{m'-k'}$. Ekkor az is igaz, hogy $a_{m-k}a'_{k'} = (-)^k(-)^{m'-k'}\overline{a}_k\overline{a}'_{m'-k'}$. Ha ez nem nulla, akkor ezzel leosztva az előzőt, majd a nevezőkkel felszorozva kapjuk:

$$|a_k|^2 = (-)^m|a_{m-k}|^2 \tag{50}$$

Ennek az egyenletnek akkor van triviálistól eltérő megoldása, ha m páros. Hasonló eljátszható a másik térre is. Tehát azt láthattuk meg, hogy *a páratlan esetben a valós altér elemei nem lehetnek szeparálhatók!*

2.4. SU(2) ábrázolása

SU(2) irreducibilis ábrázolása $\mathcal{S}^mV \otimes \mathcal{S}^{m'}V'$-n a két téren való ábrázolás tenzorszorzata lesz:

$$\begin{aligned}
&\forall q \in \mathrm{SU}(2), \quad \forall m, m' \in \mathbb{N}: \\
&\varrho_{mm'}: \quad \mathrm{SU}(2) \times \mathcal{S}^mV \otimes \mathcal{S}^{m'}V' \longrightarrow \mathcal{S}^mV \otimes \mathcal{S}^{m'}V' \\
&\varrho_{mm'} = \varrho_m \otimes \varrho_{m'} \\
&\varrho_{mm'}(q)P_{mm'}(z, z') = P_{mm'}(q^{-1}z, q^{-1}z').
\end{aligned} \tag{51}$$

2.5. A valós altér SU(2)-invarianciájáról

Állítás: A (43) szerint valós polinomok altere zárt a (51) szerinti SU(2) hatásra.
Bizonyítás: A (46) feltétel valós-lineáris, így azt kell belátnunk, hogy SU(2) hatása egy valós polinomon valós polinomot ad. Tehát legyen

$$R_{mm'}(x,y,x',y') = \sum_{k=0}^{m}\sum_{k'=0}^{m'} a_{kk'} x^k y^{m-k} x'^{k'} y'^{m'-k'}, \qquad (52)$$

$$\varrho_{mm'}(q) R_{mm'}(x,y,x',y') = \sum_{k=0}^{m}\sum_{k'=0}^{m'} b_{kk'} x^k y^{m-k} x'^{k'} y'^{m'-k'}, \qquad (53)$$

ekkor kell belátni, hogy

$$\begin{gathered} a_{kk'} = (-)^{m-k}(-)^{m'-k'}\overline{a}_{m-k,m'-k'} \\ \Downarrow \\ b_{kk'} = (-)^{m-k}(-)^{m'-k'}\overline{b}_{m-k,m'-k'}. \end{gathered} \qquad (54)$$

A 1.5 fejezetben leírt bizonyítás egy-az-egyben végigvihető itt is.

A korábbi (13)-(17), (18) számolással analóg módon adódik a transzformált polinom $b_{ff'}$ együtthatóira:

$$b_{ff'} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{k'=0}^{m'} a_{kk'} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i}\binom{m-k}{j} u^i \overline{u}^{m-k-j} v^{k-i} (-\overline{v})^j \delta_{i+j,f} \times$$
$$\sum_{i'=0}^{k'}\sum_{j'=0}^{m'-k'} \binom{k'}{i'}\binom{m'-k'}{j'} u^{i'} \overline{u}^{m'-k'-j'} v^{k'-i'} (-\overline{v})^{j'} \delta_{i'+j',f'}. \qquad (55)$$

Ennek kell megegyeznie $(-)^{m-f}(-)^{m'-f'}\overline{b}_{m-f,m'-f'}$-vel, amit a (19)-(23) számolás szerint gyárthatunk le:

$$(-)^{m-f}(-)^{m'-f'}\overline{b}_{m-f,m'-f'} =$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{k'=0}^{m'} (-)^{m-k}(-)^{m'-k'}\overline{a}_{m-k,m'-k'} \times$$
$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} \binom{k}{i}\binom{m-k}{j} u^i \overline{u}^{m-k-j} v^{k-i} (-\overline{v})^j \delta_{i+j,f} \times$$
$$\sum_{i'=0}^{k'}\sum_{j'=0}^{m'-k'} \binom{k'}{i'}\binom{m'-k'}{j'} u^{i'} \overline{u}^{m'-k'-j'} v^{k'-i'} (-\overline{v})^{j'} \delta_{i'+j',f'}. \qquad (56)$$

Igen, ha az eredeti polinom valós volt, ($a_{kk'} = (-)^{m-k}(-)^{m'-k'}\overline{a}_{m-k,m'-k'}$) akkor a fentit összevetve (55)-gyel:

$$(-)^{m-f}(-)^{m'-f'}\overline{b}_{m-f,m'-f'} = b_{ff'}. \qquad \mathcal{Q.E.D.} \qquad (57)$$

2.6. Egy másik bizonyítás

A 1.6 alfejezet bizonyítása itt is végigvihető, mivel (31) szerint

$$\tau_{mm'} = \varrho_m(\varepsilon) \otimes \varrho_{m'}(\varepsilon)\hat{\mathcal{C}} \tag{58}$$

(43) miatt.
Állítás:

$$\forall q \in \mathrm{SU}(2): \qquad [\tau_{mm'}, \varrho_{mm'}(q)] = 0. \tag{59}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\tau_{mm'}\varrho_{mm'}(q) &= \big(\varrho_m(\varepsilon) \otimes \varrho_{m'}(\varepsilon)\big)\hat{\mathcal{C}}\big(\varrho_m(q) \otimes \varrho_{m'}(q)\big) && (60)\\
&= \big(\varrho_m(\varepsilon) \otimes \varrho_{m'}(\varepsilon)\big)\big(\varrho_m(\overline{q}) \otimes \varrho_{m'}(\overline{q})\big)\hat{\mathcal{C}} && (61)\\
&= \varrho_m(\varepsilon)\varrho_m(\overline{q}) \otimes \varrho_{m'}(\varepsilon)\varrho_{m'}(\overline{q})\hat{\mathcal{C}} && (62)\\
&= \varrho_m(\varepsilon\overline{q}) \otimes \varrho_{m'}(\varepsilon\overline{q})\hat{\mathcal{C}} && (63)\\
&= \varrho_m(q\varepsilon) \otimes \varrho_{m'}(q\varepsilon)\hat{\mathcal{C}} && (64)\\
&= \varrho_m(q)\varrho_m(\varepsilon) \otimes \varrho_{m'}(q)\varrho_{m'}(\varepsilon)\hat{\mathcal{C}} = \varrho_{mm'}(q)\tau_{mm'}. && (65)
\end{aligned}$$

$\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$