

#### 4. feladat – állapotmegkülönböztetés POVM-mal

Alíz és Bob az órán ismertetett játékot játsza. A beazonosítandó kvantumállapotok legyenek a

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

irányokra vetítő projekciók! Bob a következő POVM-mot használja:

$$E_1 = c|1\rangle\langle 1|, \quad E_2 = c\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|), \quad E_3 = I - E_1 - E_2.$$

(Emlékeztető:  $E_i = M_i^\dagger M_i$ -ként kapható a mérési operátorokból, ha csak a  $q_i = \text{tr } E_i \rho$  mérési eloszlással akarunk foglalkozni, akkor ezzel kényelmesebb dolgozni. (Illetve ekkor az általánosabb vizsgálatok is elegánsabbak.) A rá vonatkozó feltételek nyilván  $E_i \geq 0$  és  $\sum_i E_i = I$ .) Kérdések:

- Milyen értékeket vehet fel  $c$  ahhoz, hogy  $E_{1,2,3}$  tényleg POVM-ot határozzon meg?
  - Mik lesznek a mérési eloszlások ha Alíz  $\rho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ -nek, illetve ha  $\rho = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ -nek preparálja az állapotot?
  - Mit tud mondani Bob, ha a mérés az első, a második, illetve a harmadik kimenetelt eredményezi?
- 

#### 5. feladat – spin operátor diagonalizálása

Feles spin esetén a három ortogonális spin-irányhoz tartozó operátorok  $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ , ahol

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a szokásos Pauli-mátrixok. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (\|\hat{\mathbf{v}}\|^2 = 1)$$

irányú spin operátora  $\mathbf{vS} = \sum v_i S_i$ . Mik lesznek ennek a sajátértékei és a sajátvektorai? (Órán felírtam, de nem számoltam ki, itt most számoljátok ki!)

---

## 6. feladat – Hadamard transzformáció

Egy qubit állapota megadható a

$$\varrho = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})$$

sűrűségoperátorral, ahol a Bloch-vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  a Bloch-gömbben van ( $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ ). Az úgynevezett Hadamard-transzformáció a

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \text{U}(2)$$

mátrixszal vett unitér transzformáció. Hogyan tudjuk ezt elképzelni, vagyis mi lesz ennek hatása a Bloch-gömbön:

$$\begin{aligned} \varrho &\longmapsto H\varrho H^\dagger, \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' =? \end{aligned}$$