Kvantumösszefonódás Házifeladat, 2012. február 29. Határidő **2012. március 14.** Most csak két feladat lesz, de a második kettőt ér. Vagy akár többet is, a pontozáson még nem gondolkodtam.

---

7. feladat – spin-flip

A szokásos Pauli mátrixok:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

és jelöljük: $\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$. Egy qubit állapota megadható a

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\big) \tag{2}$$

sűrűségoperátorral, ahol a Bloch-vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a Bloch-gömbben van ($\|\mathbf{x}\| \leq 1$). Hajtsuk végre az úgynevezett spin-flip transzformációt, amely komplex konjugálás, majd unitér transzformáció a σ_2 Pauli-mátrixszal. (Ez együtt egy anti-unitér transzformáció, órán majd lesz szó az ilyenekről.) Hogyan tudjuk ezt elképzelni, vagyis mi lesz ennek hatása a Bloch-gömbön:

$$\begin{aligned} \varrho &\longmapsto \tilde{\varrho} = \sigma_2 \overline{\varrho} \sigma_2^\dagger, \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' = ? \end{aligned}$$

(A felülvonás komplex konjugálást jelent.)

A következő feladathoz jól jön a Pauli-mátrixok ismert szorzása:

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\mathrm{I} + i\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{jkl}\sigma_l,$$

ami miatt

$$(\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{y}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{x}\mathbf{y})\mathrm{I} + i(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\boldsymbol{\sigma},$$

és nem is kell mátrixot szorozni :-)

8. feladat – forgáscsoport

(Ez részben volt matmódszerekből, de jó felidézni, hogy teljesebb legyen a kép.) Legyen $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ ($\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = 1$) egységvektor, $\gamma \in \mathbb{R}$ szög, és képezzük az

$$U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = \mathrm{e}^{-i\frac{\gamma}{2}\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}} \tag{3}$$

mátrixot.

(a) Ujjgyakorlatként végezzük el az exponencializálást: vagyis kérdés az r skalár és az $\mathbf{r}$ vektor, amikre $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = r\mathrm{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$.

(b) Ha ez megvan, akkor ebből könnyen kiszámolható $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ determinánsa. Do it! (Igazából máshogy is lehet, nem csak az (a) eredményéből.)

(c) Mi lesz $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ hatása a Bloch-gömbön:

$$\begin{aligned} \varrho &\longmapsto U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\varrho U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)^\dagger, \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' = R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x}, \qquad R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = ? \end{aligned}$$

Egy forgatást kell kapni a Bloch-gömbön, de hogy ez tényleg egy forgatási mátrix, azt a következő részfeladatból és az azt követő megjegyzésből fogjuk megtudni:

(d) Vegyük a következő mátrixokat:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

és jelöljük: $\mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma} = x_1\Sigma_1 + x_2\Sigma_2 + x_3\Sigma_3$. Ennek hatása vektoriális szorzás $\mathbf{x}$-szel: $(\mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{y} = i(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. Ezekkel legyen

$$R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = \mathrm{e}^{-i\gamma\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\Sigma}}. \tag{5}$$

Végezzük el az exponencializálást! Ez az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ mátrix meg kell, hogy egyezzen a (c) feladatban kapott mátrixszal.

Megjegyzés. $\frac{1}{2}\sigma_i$ és Σ_i ugyanannak a Lie-algebrának a 2 és 3 dimenziós ábrázolásai: mindkettőre igaz, hogy

$$[J_j, J_k] = i\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} J_l,$$

ami az $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ Lie algebrát adja meg, ennek lesz $\frac{1}{2}\sigma_i$ és Σ_i a $j = \frac{1}{2}$-es és $j = 1$-es spinű ábrázolásai. Ekkor az exponenciális leképezéssel (lásd az (3) és (5) egyenletek) $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ és az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ mátrixok a SU(2) Lie csoport $j = \frac{1}{2}$-es és $j = 1$-es spinű ábrázolásai. (A 2 dimenziós a „definiáló” ábrázolás.) A $j = 1$-es spinű ábrázolás megadja az SO(3)-nak (ami a három dimenziós tér forgatásai) is a 3 dimenziós (definiáló) ábrázolását. Az $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)^\dagger = (R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}$ miatt SU(2) kétszeresen fedi SO(3)-at: $\pm U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ ugyanazt az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$-t adja.

---

9. feladat – mégegy önhivatkozó

Pluszpontért találjatok ki valamilyen frappáns feladatot a mai óra anyagához, és oldjátok meg! (Február 29, a konvex halmazos témakör.)