Kvantumösszefonódás Házifeladat, 2012. március 7. Határidő **2012. március 21.** Ez most sok kicsi egyszerű feladat.

---

10. feladat – feles spin tomográfia

Legyenek az azonosan preparált elektronspinek a

$$|\psi\rangle = \mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle \tag{1}$$

által meghatározott tiszta állapotban. Az elég triviális, hogy milyen spinmérésekkel és hogyan kell meghatározni a spin irányát leíró ϕ és θ szögeket. (Aki számára nem, az csinálja meg ezt is…) Inkább egy másik módszert használjunk: csak z-irányú spinvetületet mérhetünk, (a megfelelő $S_3 = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$ oszervábilissel,) viszont megengedett a mérés előtt megfelelően beállított mágnesekkel elforgatni a spint. (Az ilyen állapotmeghatározást hívják a szaknyelven tomográfiának.) A $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ ($\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = 1$) egységvektor körül $\gamma \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás operátora

$$U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = \mathrm{e}^{-i\frac{\gamma}{2}\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}},$$

amint az az előző feladatsor tanulsága volt. Most hogyan kell meghatározni a spin irányát leíró ϕ és θ szögeket, vagyis milyen forgatásokat hajtsunk végre a z-mérések előtt, hogy a mérési statisztikákból meghatározhassuk ϕ-t és θ-t? (Mint mindig, sok mérést végzünk a forgatás után – azonos kezdeti állapotra, – hogy a statisztika kirajzolódjon, és több ilyen mérés mehet különböző forgatásokkal.)

---

11. feladat – részben-rendezés $\mathbb{R}^n$-en kúppal

Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$ egy kúp (vagyis ha $\mathbf{x}_i \in C$ akkor $\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i \in C$ bármilyen $\lambda_i \geq 0$) és az ezzel definiált részben-rendezés $\mathbb{R}^n$-en: $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ definíció szerint ha $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in C$. Lássuk be, hogy ez részben-rendezés:
(i) $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}$,
(ii) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ és $\mathbf{y} \leq \mathbf{z}$ akkor $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$,
(iii) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ és $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ akkor $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

---

12. feladat – majorálás diszkrét eloszlásokon

$\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$ ($\mathbf{p}$-t majorálja $\mathbf{q}$) definíció szerint ha

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} q_i^{\downarrow}, \qquad \text{minden } 1 \leq k \leq n\text{-re.}$$

($^{\downarrow}$ a csökkenő sorrendbe rendezést jelenti.) Lássuk be, hogy ez részben-rendezés:
(i) $\mathbf{p} \prec \mathbf{p}$,
(ii) $\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \prec \mathbf{r}$ akkor $\mathbf{p} \prec \mathbf{r}$,

(iii) $\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \prec \mathbf{p}$ akkor $\mathbf{p}^{\downarrow} = \mathbf{q}^{\downarrow}$,
valamint néhány más tulajdonságot:
(iv) bármely $\mathbf{p}$ eloszlásra $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \prec \mathbf{p} \prec (1, 0, \ldots, 0)$,
(v) adott $\mathbf{q}$ eloszlás által majorált eloszlások konvex halmazt alkotnak, vagyis $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \prec \mathbf{q}$ akkor $0 \leq \lambda \leq 1$-re $(\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2) \prec \mathbf{q}$,
(vi) minden $\mathbf{p}$, amit majorál egy $\mathbf{q}$ benne van $\mathbf{q}$ elemeinek összes permutációjaként előálló eloszlások konvex burkában.