Kvantumösszefonódás Házifeladat, 2012. március 14. Határidő **2012. március 28.** Kis egysorosak...

A Shannon, a Tsallis és a Rényi entrópiák:

$$S(\mathbf{p}) = -\sum_i p_i \ln p_i,$$

$$S_q^{\mathrm{Ts}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q}\Big[\sum_i p_i^q - 1\Big],$$

$$S_q^{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q}\ln\sum_i p_i^q.$$

13. feladat – a Shannon entrópia általánosítása

Lássuk be, hogy $q \to 1$ esetén mind a Tsallis, mind a Rényi entrópia a Shannon entrópiához tart:

$$\lim_{q\to 1} S_q^{\mathrm{Ts}}(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}), \qquad \text{és} \qquad \lim_{q\to 1} S_q^{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}).$$

---

14. feladat – általános entrópiák

Azért lesznek ezek „jó entrópiák”, mert Schur-konkávok, ekkor bisztochasztikus leképezések Markov-láncában folyamatosan nem-csökkennek. (f Schur-konkáv, ha $\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$ esetén $f(\mathbf{p}) \geq f(\mathbf{q})$.) Lássuk be, hogy a Shannon, a Tsallis és a Rényi entrópiák mind Schur-konkávok. (Hint: használjuk az órán tanult tételt a Schur-konvexitásra.)

---

15. feladat – a Shannon entrópia specialitása

Az a tulajdonság, ami a Shannon entrópiát kiválasztja, a rekurzivitás. Lássuk be az egyszerű alakját: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ eloszlás a $(p_1, p_2, \dots, ap_n, (1-a)p_n)$ eloszlás durvítása, (mint mindig, $0 \leq a \leq 1$,) ekkor a finomabb eloszlás entrópiája nő a durvábbéhoz képest:

$$S\big((p_1, p_2, \dots, ap_n, (1-a)p_n)\big) = S\big((p_1, p_2, \dots, p_n)\big) + p_n S\big((a, 1-a)\big).$$

(Az órán felírt alak ennek következménye, és azért jobb, mert a kvantumos, tenzorszorzatos struktúra jobban látszik majd benne. Viszont ahhoz nagyon sokat kellene írni...)