Kvantumösszefonódás Házifeladat, 2012. április 4. Határidő **2012. április 18.** Az első kicsit hosszadalmas, de nem akartam, hogy mindig csak unalmas egyszerű feladatok legyenek.

---

17. feladat – 1-qubit kevert állapotok dekompozíciói

Volt: Ha $\dim \mathcal{H} = n$ és egy sűrűségmátrix spektrálfelbontása

$$\varrho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \qquad \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1,\ \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij},$$

akkor bármely tetszőleges m elemű ($m \geq n$) konvex dekompozíció

$$\varrho = \sum_{j=1}^{m} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \qquad p_j \geq 0,\ \sum p_j = 1,\ \|\psi_j\|^2 = 1,$$

kifejthető a $\sqrt{\lambda_i}|\varphi_i\rangle$ vektorokkal az U_{ji} kifejtési együttható-mátrixszal, ($m \times n$-es,) melynek oszlopai ortonormáltak ($U^\dagger U = \mathrm{I}_n$, izometria) a következőképpen:

$$\sqrt{p_j}|\psi_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} U_{ji}\sqrt{\lambda_i}|\varphi_i\rangle.$$

(m tetszőlegesen nagy lehet.) Ez volt a Schrödinger's Mixture Theorem.

Legyen $n = 2$, vagyis qubit, és írjuk fel az összes lehetséges $m = 2$ elemű dekompozíciót! Orosz Tanárúr módjára az alábbi kérdés-szekvenciával szeretném végigvezetni a megoldást:

- Elevenítsük fel az egy-qubit sűrűségmátrix spektrálfelbontását: mik lesznek a sajátvektorok, ezek milyen spin-irányoknak felelnek meg, az ezekre vetítő projekciók hol helyezkednek el a Bloch-gömbön? (Nem kell ábrát beadni, mert az egy csomó munka, de mindenki rajzoljon magának a gondolkodáshoz!)
- Ha ezt átgondoltuk, akkor már kirajzolódik, hogy mi az, amit csinálni fogunk. Vagyis?
- U most 2×2-es, ekkor unitér lesz (miért?), és nekünk elegendő a Speciális Unitérekkel ($\det U = 1$) foglalkozni (miért?), és választhatjuk a következő parametrizációt:

$$U = \begin{bmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2), \qquad a, b \in \mathbb{C} \quad \text{és} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

(Aki ezt nem tudta, az járjon utána. Spoiler: használjuk az $U^\dagger = U^{-1}$ összefüggést.)

- Írjuk fel $\sqrt{p}_1|\psi_1\rangle$-et, $\sqrt{p}_2|\psi_2\rangle$-t, és ezekből p_1-et és p_2-t!
- Hol lesznek ezek a pontok a Bloch-gömbön? Ehhez írjuk fel a $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ és $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ tiszta állapotok mátrixát az eredeti $|\varphi_i\rangle$-bázisban, és olvassuk le a Bloch-vektorok koordinátáit, vagy ha úgy tetszik, az irányszögeket! (Figyelem! Mivel $|\varphi_i\rangle$-bázisban dolgozunk, ez azt a könnyítést jelenti, hogy az eredeti állapot... merre is van?)

- Ezek a Bloch-vektorok még eléggé emészthetetlenül néznek ki ahhoz, hogy ne lássunk belőlük semmit. Amit megtehetünk, hogy vesszük az $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$-et, (ami mit is jelent?) és ebben a speciális esetben már elég jól látszik, hogy a $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ és $|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ pontok hol lesznek. (Hol is?) (Persze ez triviális.)
- És mit fejeznek ki az általános formulák? (Ez nem biztos, hogy frappánsan megválaszolható, most nincs több időm, hogy gondolkodjak rajta. Ha igen, akkor ahhoz már kell egy kis kreativitás... Szóval ez csak pluszpontért...)

---

18. feladat – Néhány hasznos formula

Könnyű, csak a multiindexelés átgondolásához: Lássuk be, hogy ha A egy $n_1 \times n_1$-es és B egy $n_2 \times n_2$-es mátrix, akkor

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A \otimes B) &= (\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, B), \\ \mathrm{tr}_1(A \otimes B) &= (\mathrm{tr}\, A)B, \\ \mathrm{tr}_2(A \otimes B) &= A(\mathrm{tr}\, B), \\ \det(A \otimes B) &= (\det A)^{n_1}(\det B)^{n_2}. \end{aligned}$$

(Igazából a másodikból vagy a harmadikból következik az első, de midegy.)

---

19. feladat – 2-qubit kanonikus alak

Legyen $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$, és a bázis a szokásos gyorsírással $|\varphi_i^1\rangle \otimes |\varphi_j^2\rangle \equiv |\varphi_{ij}\rangle =: |ij\rangle$, és legyen mindkét Hilbert-tér két dimenziós, tehát általában $|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$. Legyen most

$$|\psi\rangle = \cos(\alpha)|00\rangle + \sin(\alpha)|11\rangle$$

- Mik lesznek a Schmidt-együtthatók?
- Írjuk fel a $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotú sűrűségmátrixot a fenti bázisban,
- valamint a részrendszerek állapotait (redukált sűrűségmátrixok): $\varrho^1 = \mathrm{tr}_2\, \varrho$, $\varrho^2 = \mathrm{tr}_1\, \varrho$.
- Mi lesz a spektrumuk?