Kvantumösszefonódás Házifeladat, 2012. április 11. Határidő **2012. április 25.** Ezek talán már nem annyira potya feladatok. Igazából azért került sor a mai anyagra ilyen részletesen, hogy adhassak végre nemtriviális házikat…;)

---

20. feladat – minden TPCP trafónak létezik környezeti reprezentációja

(A mai órán láttuk, hogy Φ *teljesen pozitív trace-tartó* (TPCP) pontosan akkor, ha felírható $\Phi(\varrho) = \sum_j A_j \varrho A_j^\dagger$ alakban valamely $\{A_j\}$ mátrixokkal, melyekre $\sum_j A_j^\dagger A_j = \mathrm{I}$.)

Legyen $\varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, legyen $\mathcal{K}$ kiegészítő Hilbert-tér (ancilla), és $\sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$, és $U \in \mathrm{U}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$. Ekkor láttuk az előző órán, hogy egy $\Phi(\varrho) = \mathrm{tr}_{\mathrm{anc}}\, U(\varrho\otimes\sigma)U^\dagger$ formulával definiált leképezéshez léteznek $\{A_j\}$ mátrixok, hogy $\sum_j A_j^\dagger A_j = \mathrm{I}$, amikkel $\Phi(\varrho) = \sum_j A_j \varrho A_j^\dagger$, vagyis Φ (TPCP).

Most lássuk be a fordítottját: Legyen Φ TPCP leképezés, ekkor bizonyítandó, hogy léteznek $\mathcal{K}$ ancilla, $\sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$, és $U \in \mathrm{U}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, amikkel $\Phi(\varrho) = \mathrm{tr}_{\mathrm{anc}}\, U(\varrho\otimes\sigma)U^\dagger$.

(Tipp: $\sigma = |\chi\rangle\langle\chi|$ tiszta ancilla-állapottal elég számolni, már ekkor is le tudjuk gyártani U-t az A_j-k és χ segítségével. írjuk fel! Ugye unitér lesz?)

---

21. feladat – ide kellene valami frappáns cím, de az már az előbb sem sikerült

Órán volt: $n = 2$ esetben a bisztochasztikus kvantumcsatornák (olyan TPCP leképezések, amik identitástartók) konvex halmazának extrém pontjai az $\Phi(\varrho) = U\varrho U^\dagger$ unitér transzformációk, vagyis minden bisztochasztikus kvantumcsatorna egy „random external fields" transzformáció (aminek alakja $\Phi(\varrho) = \sum_j p_j U_j \varrho U_j^\dagger$ ahol U_j-k unitérek, és $p_j \geq 0$, $\sum p_j = 1$).

$n > 2$ esetben ez nem igaz. Mutassunk ellenpéldát, vagyis olyan extrém bisztochasztikus kvantumcsatornát, ami nem unitér! Ehhez használjuk fel a következőt:

Lemma (Choi): Φ extrém pont a CP leképezések konvex halmazában akkor és csak akkor, ha Φ-nek létezik olyan kanonikus Kraus-reprezentációja, (vagyis Kraus-alakja ortogonális $\{A_k\}$ mátrixokkal) ahol az $A_k^\dagger A_l$ mátrixok lineárisan függetlenek.

(Tipp: próbálkozzunk az impulzusmomentum-komponens operátorok $2j{+}1$-dimenziós (j-spinű) ábrázolásával! Ha általánosan nem megy, akkor nézzük a konkrét $j = 1$-es spinű ábrázolást! Az is látszik, hogy $j = 1/2$ spinre (2-dimenziós ábrázolás) így nem kapunk ellenpéldát. (Persze máshogy sem.))

---

22. feladat – bináris csatornák

Legyen Φ egy 1-qubit csatorna. Ha $\varrho = \frac{1}{2}\mathrm{I} + \sum_{k=1}^{3} x_k\sigma_k$ kiindulási állapot, akkor tekintsük azokat a speciális transzformációkat, amikre $\Phi(\varrho) = \frac{1}{2}\mathrm{I} + \sum_{k=1}^{3}(\eta_k x_k + \kappa_k)\sigma_k$ valamely $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra. A megfelelő affin leképezés hipermátrixával felírva $\Phi(\varrho)_{ij} = \Phi_{iji'j'}\varrho_{i'j'}$.

a.) Olvassuk le $\Phi_{iji'j'}$ hipermátrixot! (tipp: Ez favágás módjára is megtehető, de könnyebb, gyorsabb és elegánsabb, ha észrevesszük, hogy könnyen dolgozhatunk a négy ortogonális Bell-állapot bázisában: $\beta_0 = [1, 0, 0, 1]/\sqrt{2}$, $\beta_i = (\sigma_i \otimes \mathrm{I})\beta_0$. Ezt úgy is nevezik, hogy „magic base"... nem véletlenül... Még fogunk vele találkozni. Az ő szép tulajdonságai miatt lesz két qubit összefonódása jól számolható.)
b.) Állítsuk elő a Φ dinamikai mátrixát! (Ez Φ^R, ahol a hipermátrix „reshuffling" művelet definíciója $\Phi^R_{ii'jj'} = \Phi_{iji'j'}$)
c.) $\boldsymbol{\kappa} = 0$ esetben (egységőrző, tehát bisztochasztikus kvantumcsatorna) számoljuk ki Φ^R mátrix sajátértékeit. Choi tétel szerint Φ^R pozitív szemidefinit pontosan akkor, ha Φ teljesen pozitív. Ez milyen $\boldsymbol{\eta}$ vektorok esetén teljesül? (Órán felírtam ezeket, csak nem számoltuk ki.)