23. feladat – Majorálás kvantumállapotokon

Volt: klasszikus esetben (véges diszkrét valószínűségeloszlások) fennáll a következő:

$$\mathbf{p} \prec \mathbf{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1 \quad \text{hogy} \quad \mathbf{p} = \sum_i a_i \Pi_i \mathbf{q},$$

ahol Π_i-k permutációs mátrixok, tehát elegendő, ha i maximum $n!$-ig megy, ahol n az eloszlások hossza. Bizonyítsuk be az állítás kvantumos megfelelőjét: (Uhlmann majorálási tétel)

$$\varrho \prec \sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1 \quad \text{hogy} \quad \varrho = \sum_i a_i U \sigma U^\dagger,$$

ahol $U_i \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ unitér operátorok, és – noha végtelen sok unitér mátrix van, de – elegendő, ha i maximum $d!$-ig megy, ahol $d = \dim \mathcal{H}$. (A majorálás kvantumállapotokon: $\varrho \prec \sigma$ definíció szerint ha $\operatorname{Spect} \varrho \prec \operatorname{Spect} \sigma$.)

24. feladat – Araki-Lieb háromszög-egyenlőtlenség

Legyen $\varrho_{12} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2)$ az összetett rendszer állapota, és $\varrho_1 = \operatorname{tr}_2 \varrho_{12} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^1)$ valamint $\varrho_2 = \operatorname{tr}_1 \varrho_{12} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^2)$ a részrendszereké. Bizonyítsuk be a Neumann-entrópiára vonatkozó Araki-Lieb háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|S(\varrho_2) - S(\varrho_1)| \leq S(\varrho_{12}).$$

(Hint: A bizonyításhoz használjuk a purifikációs trükköt, amit órán az erős szubadditivitás ekvivalens alakjának legyártásához használtunk, illetve a Neumann-entrópia szubadditivitását. Ezekből könnyen jön az eredmény.) (Miért háromszög-egyenlőtlenség?)

25. feladat – A kvantum relatív entrópia pozitivitása

A kvantum relatív entrópia: $\varrho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokra

$$S(\varrho \| \sigma) = \operatorname{tr} \varrho (\ln \varrho - \ln \sigma).$$

Bizonyítsuk be, hogy ez nemnegatív, és 0 akkor és csak akkor, ha $\varrho = \sigma$.

Ehhez bizonyítsunk egy erősebb állítást:

$$S(\varrho \| \sigma) \geq \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma - \varrho)^2.$$

(Hint: Ehhez igazoljuk, majd használjuk fel a következő, $\eta(x) = -x \ln x$ függvényre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$-\eta(x) + \eta(y) + (x-y)\eta'(y) \geq \frac{1}{2}(x-y)^2,$$

ahol a $'$ deriválást jelent. Ezt követően használjuk fel a mátrixkalkulusbeli eredményt, hogy ha c_k valós számokra, f_k, g_k valós függvényekre $\sum_k c_k f_k(x) g_k(y) \geq 0$, akkor ha x és y helyére A és B önadjungált mátrixokat írunk, akkor igaz a összefüggés a nyomra: $\sum_k c_k \operatorname{tr}\big(f_k(A) g_k(B)\big) \geq 0$.)