Kvantumösszefonódás Házifeladat, 2012. április 25. Határidő **2012. május 9.**

A szokásos Pauli-mátrixok:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

26. feladat – Ezt a 23. feladathoz akartam, csak elfelejtettem...

Legyen $\dim \mathcal{H} = 2$, (feles spin rendszere, qubit,) rajta $\varrho, \omega \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokkal, melyek Bloch-vektoros felírása:

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\big), \quad \omega = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{y}\boldsymbol{\sigma}\big), \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq 1.$$

Mit jelent az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ Bloch-vektorok nyelvén, hogy $\varrho \prec \omega$? (A szükséges definíciók elhangzottak órán, de megtalálhatóak a 12. feladatban (`HF04.pdf`) és a 23. feladatban (`HF09.pdf`).)

---

27. feladat – Qubitek relatív entrópiája

$\varrho, \omega \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotok kvantum relatív entrópiája

$$S(\varrho \| \omega) = \operatorname{tr} \varrho(\ln \varrho - \ln \omega).$$

Adjunk meg valamilyen nem túl szörnyen kinéző formulát az előző feladatbeli ϱ, ω qubitállapotok relatív entrópiájára! (Ez felírható csupán a két Bloch-vektor hosszával és közbezárt szögükkel.)

---

28. feladat – Két spin összeadása

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ két feles spin összetett rendszere: $\dim \mathcal{H}^1 = \dim \mathcal{H}^2 = 2$. Feles spin esetén a három ortogonális spin-irányhoz tartozó operátorok $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ (gyorsírással $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$) a spin hossznégyzetéhez tartozó operátor pedig $\mathbf{S}^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (S_i)^2$ mindkét részrendszeren. Az összetett rendszer két részrendszerén a megfelelő mérhető mennyiségek operátorai $S_i^{(1)} = \frac{\hbar}{2}\sigma_i \otimes \mathrm{I}$ és $S_i^{(2)} = \frac{\hbar}{2}\mathrm{I} \otimes \sigma_i$, (gyorsírással $\mathbf{S}^{(1)} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathrm{I}$ és $\mathbf{S}^{(2)} = \frac{\hbar}{2}\mathrm{I} \otimes \boldsymbol{\sigma}$). A két spin összegéhez tartozó mérhető mennyiségek operátorai pedig $S_i^{(12)} = S_i^{(1)} + S_i^{(2)}$, (gyorsírással $\mathbf{S}^{(12)} = \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$,) a hossznégyzethez pedig $(\mathbf{S}^{(12)})^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (S_i^{(12)})^2$.

a.) Írjuk fel az $S_1^{(12)}$, $S_2^{(12)}$ és $S_3^{(12)}$ operátorok mátrixait a standard bázisban! (Amiben a Pauli-mátrixokat is felírtuk.)

b.) Írjuk fel az $(\mathbf{S}^{(12)})^2$ operátort a Pauli-mátrixok tenzorszorzatainak lineárkombinációjaként is, és adjuk meg a mátrixát is a standard bázisban!

c.) Az úgynevezett Flip-operátor hatása: $F|\psi^1\rangle \otimes |\psi^2\rangle = |\psi^2\rangle \otimes |\psi^1\rangle$, vagyis megcseréli a két részrendszer szerepét. Írjuk fel a mátrixát, és adjuk meg a Pauli-mátrixok tenzorszorzatainak lineárkombinációjaként is! Mi lesz F kapcsolata $(\mathbf{S}^{(12)})^2$-tel?