A szokásos Pauli-mátrixok:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

29. feladat – A Bell-egyenlőtlenséghez

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ két feles spin összetett rendszere: $\dim \mathcal{H}^1 = \dim \mathcal{H}^2 = 2$. Feles spin esetén a három ortogonális spin-irányhoz tartozó operátorok $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ (gyorsírással $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$), és az adott $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{a}\|^2 = 1$ irányú spin-mérés operátora $S_\mathbf{a} = \sum_i a_i S_i$ (gyorsírással $S_\mathbf{a} = \mathbf{aS}$). Az összetett rendszer két részrendszerén a megfelelő mérhető mennyiségek operátorai $S_\mathbf{a}^{(1)} = S_\mathbf{a} \otimes \mathrm{I}$ és $S_\mathbf{b}^{(2)} = \mathrm{I} \otimes S_\mathbf{b}$, A spin-korrelációs méréshez tartozó obszervábilis $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = S_\mathbf{a}^{(1)} S_\mathbf{b}^{(2)} = S_\mathbf{a} \otimes S_\mathbf{b}$.
a.) Számítsuk ki az

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \langle\psi|S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|\psi\rangle$$

várhatóértéket a $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ szinglet-állapotban! (Órán felírtam, most számoljuk ki.)
b.) A Bell-egyenlőtlenség

$$\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{-2} \big|E(\mathbf{a},\mathbf{b}) - E(\mathbf{a},\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}) + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}')\big| \leq 2,$$

keressünk legylább egy olyan $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ mérési irány-készletet, amikre ez sérül!

Hogy ne csak az ismert dolgok legyenek, gyengítsük egy kicsit a lehetőségeinket: tudjuk sérteni az egyenlőtlenséget nem teljesen összefont állapottal is? Erről szól a következő két részfeladat:
c.) Számoljuk ki az $E(\mathbf{a},\mathbf{b})$ várhatóértéket a $|\psi'(\eta)\rangle = \sqrt{\eta}|01\rangle - \sqrt{1-\eta}|10\rangle$ állapotban! ($0 \leq \eta \leq 1$, ez lokális-unitér ekvivalens a szokásos Schmidt alakkal, de ezzel kicsit szebben lehet számolni. Az a lényeg, hogy az η paraméterrel folytonosan változtatjuk az állapot összefontságát, lásd a 31.f feladatban.)
d.) A b.) feladatban talált $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ mérési beállításokkal milyen intervallumba eshet η ahhoz, hogy a Bell-egyenlőtlenség sérüljön? (Vagyis milyen az a legkevésbé összefont állapot, amivel még sérteni lehet az egyenlőtlenséget?)
e.) Sok plusz pontért: Mutassuk meg, hogy bármely kis (de nem nulla) összefontság esetén lehet találni olyan mérési beállításokat, amivel a Bell-egyenlőtlenség sérthető! (Azért sok plusz pontért, mert nem néztem meg, hogy meg lehet-e így csinálni... Más megközelítésből viszonylag könnyen adódik, remélem, eljutunk odáig következő órán!)

30. feladat – Kvantum-teleportálás

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ két feles spin összetett rendszerének Hilbert-tere: $\dim \mathcal{H}^1 = \dim \mathcal{H}^2 = 2$. A Bell-állapotok ezen a Hilbert-téren

$$\begin{aligned}
|\mathrm{B}_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big) = \sigma_0 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle,\\
|\mathrm{B}_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big) = \sigma_1 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle,\\
|\mathrm{B}_2\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big) = \sigma_2 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle,\\
|\mathrm{B}_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big) = \sigma_3 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle,
\end{aligned}$$

($\sigma_0 = \mathrm{I}$) teljes ortonormált rendszert alkotnak, lokális-unitér ekvivalensek egymással, és mindannyian maximálisan összefontak. (Magic Basis-nak is szokták nevezni, korábbi házi feladatban β-val jelöltem, de jelöljük inkább nagy latin betűvel, mert még később is így fogunk nevezetes tiszta állapotokat jelölni.)

Az órán nézett teleportálási protokollban három qubit vesz részt: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^3$, $\dim \mathcal{H}^1 = \dim \mathcal{H}^2 = \dim \mathcal{H}^3 = 2$. A számításánál kihasználtuk az e tér megfelelő elemeire vonatkozó alábbi egyenlőséget:

$$|\chi\rangle \otimes |\mathrm{B}_0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} |\mathrm{B}_j\rangle \otimes \big(\sigma_j|\chi\rangle\big).$$

Számoljuk ki, hogy tényleg így van! (Itt is lehet fát vágni, de aki a 28. feladatban rájött, hogy milyen szép alakja van a flip operátornak a Pauli-mátrixokkal, az ezt könnyen felírva három részrendszerben az első és a harmadik cseréjére, nagyon gyorsan célt ér.)

---

31. feladat – Konkurrencia

Legyen $\varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ sűrűség mátrix, és $\dim \mathcal{H} = d$. A konkurrencia-négyzet a $q = 2$ paraméterű Tsallis-entrópia normált változata:

$$C^2(\varrho) = \frac{d}{d-1} S_2^{\mathrm{Ts}}(\varrho) = \frac{d}{d-1}\big(1 - \operatorname{tr}\varrho^2\big),$$

tehát ez is a sűrűség mátrix kevertségét jellemzi. (Egyébként az I identitás operátor szórásnégyzetével kapcsolatos.)

a.) Ellenőrizzük, hogy $C^2(\varrho) \leq 1$, és ezt a maximumot fel is veszi!

b.) Legyen $d = 2$ (qubit)! Ekkor $C^2(\varrho)$ arányos lesz a sűrűség mátrix egy invariánsával. Hogy fog kinézni? (Ismét lehet fát vágni, de használhatjuk a Cayley-Hamilton tételt is.)

c.) Szintén qubitre, használjuk a sűrűségmátrix Bloch-vektoros felírását: $\varrho = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})$, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{x}\|^2 \leq 1$ a Bloch-vektor a spin iránya. Számítsuk ki $C^2(\varrho)$-t ekkor!

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ két részrendszer összetett rendszerének Hilbert-tere, és $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ tiszta állapot a $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vektorral megadva. ($|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{1} \psi_{ij}|ij\rangle$) Ennek a *tiszta* állapotnak az összefontságának mértékét jellemzi az összetett tiszta állapot konkurrencia-négyzete, (írott nagy $\mathcal{C}$,) ami a részrendszer kevertségének mértéke annak konkurrencia-négyzetével:

$$\mathcal{C}^2(\psi) = C^2(\varrho_1), \qquad \text{ahol} \quad \varrho_1 = \mathrm{tr}_2\, |\psi\rangle\langle\psi|.$$

d.) Ugye igaz, hogy $C^2(\varrho_1) = C^2(\varrho_2)$, ha ϱ_1 és ϱ_2 egy tiszta állapot két redukáltja?
e.) Két qubit esetén, felhasználva a b.) feladatban kapott eredményt, könnyen kapunk erre egy formulát a ψ_{ij} „kifejtési-együttható mátrix” egy invariánsával. Mi lesz ez a formula?
f.) Ismét két qubitre, legyen $|\psi(\eta)\rangle = \sqrt{\eta}|00\rangle + \sqrt{1-\eta}|11\rangle$ Schmidt-kanonikus alak. Számoljuk ki a $\mathcal{C}^2(\psi(\eta))$ konkurrenciáját! Ugyanannyi lesz, mint az előző feladatbeli $|\psi'(\eta)\rangle$ állapotra? Milyen η paraméterek esetén lesz az állapot szeparálható ($\mathcal{C}^2 = 0$), és mikor lesz maximálisan összefont ($\mathcal{C}^2$ maximális)?