4. feladat – állapotmegkülönböztetés POVM-mal

Alíz és Bob az órán ismertetett játékot játsza, egy olyan kvantumrendszerrel, melyhez rendelt Hilbert tér dimenziója 2. A szokásos „számítási bázis” $|0\rangle$ és $|1\rangle$. A beazonosítandó kvantumállapotok legyenek a

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle, \qquad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)$$

irányokra vetítő projekciók! Bob a következő POVM-mot használja:

$$E_1 = c|1\rangle\langle 1|, \qquad E_2 = c\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0| - \langle 1|\big), \qquad E_3 = \mathrm{I} - E_1 - E_2.$$

(Emlékeztető: $E_i = M_i^\dagger M_i$-ként kapható a mérési operátorokból, ha csak a $q_i = \operatorname{tr} E_i \varrho$ mérési eloszlással akarunk foglalkozni, akkor ezzel kényelmesebb dolgozni. (Illetve ekkor az általánosabb vizsgálatok is elegánsabbak.) A rá vonatkozó feltételek nyilván $E_i \geq 0$ és $\sum_i E_i = \mathrm{I}$.) Kérdések:

- Milyen értékeket vehet fel c ahhoz, hogy $E_{1,2,3}$ tényleg POVM-ot határozzon meg?
- Mik lesznek a mérési eloszlások ha Alíz $\varrho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$-nek, illetve ha $\varrho = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$-nek preparálja az állapotot?
- Mit tud mondani Bob, ha a mérés az első, a második, illetve a harmadik kimenetelt eredményezi?

---

5. feladat – spin operátor diagonalizálása

Feles spin esetén a három ortogonális spin-irányhoz tartozó operátorok $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, ahol

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a szokásos Pauli-mátrixok. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad (\|\hat{\mathbf{v}}\|^2 = 1)$$

irányú spin operátora $\mathbf{vS} = \sum v_i S_i$. Mik lesznek ennek a sajátértékei és a sajátvektorai? (Órán felírtam, de nem számoltam ki, itt most számoljátok ki!)

6. feladat – Hadamard transzformáció

Egy qubit állapota megadható a

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\big)$$

sűrűségoperátorral, ahol a Bloch-vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a Bloch-gömbben van ($\|\mathbf{x}\| \leq 1$). Az úgynevezett Hadamard-transzformáció a

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2)$$

mátrixszal vett unitér transzformáció. Hogyan tudjuk ezt elképzelni, vagyis mi lesz ennek hatása a Bloch-gömbön:

$$\begin{aligned} \varrho &\longmapsto H\varrho H^\dagger, \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' =? \end{aligned}$$