Kvantumösszefonódás házi feladat, 2012. március 14. Határidő **2012. március 31.** Ez most sok kicsi egyszerű feladat.

---

10. feladat – feles spin tomográfia

Legyenek az azonosan preparált elektronspinek a

$$|\psi\rangle = \mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \tag{1}$$

által meghatározott tiszta állapotban. Az elég triviális, hogy milyen spinmérésekkel és hogyan kell meghatározni a spin irányát leíró ϕ és θ szögeket. (Aki számára nem, az csinálja meg ezt is...) Inkább egy másik módszert használjunk: csak z-irányú spinvetületet mérhetünk, (a megfelelő $S_3 = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$ oszervábilissel,) viszont megengedett a mérés előtt megfelelően beállított mágnesekkel elforgatni a spint. (Az ilyen állapotmeghatározást hívják a szaknyelven tomográfiának.) A $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ ($\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = 1$) egységvektor körül $\gamma \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás operátora

$$U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = \mathrm{e}^{-i\frac{\gamma}{2}\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}},$$

amint az az előző feladatsor tanulsága volt. Most hogyan kell meghatározni a spin irányát leíró ϕ és θ szögeket, vagyis milyen forgatásokat hajtsunk végre a z-mérések előtt, hogy a mérési statisztikákból meghatározhassuk ϕ-t és θ-t? (Mint mindig, sok mérést végzünk a forgatás után – azonos kezdeti állapotra, – hogy a statisztika kirajzolódjon, és több ilyen mérés mehet különböző forgatásokkal.)

---

11. feladat – részben-rendezés $\mathbb{R}^m$-en kúppal

Legyen $C \subset \mathbb{R}^m$ egy kúp (vagyis ha $\mathbf{x}_i \in C$ akkor $\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i \in C$ bármilyen $\lambda_i \geq 0$) mely nem tartalmaz lineáris alteret. Ezzel megadhatunk egy részben-rendezést $\mathbb{R}^m$-en: $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ definíció szerint ha $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in C$. (Vagyis a kúp elemeit tekintjük/nevezzük „pozitívnak”.) Lássuk be, hogy ez részben-rendezés:
(i) $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}$,
(ii) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ és $\mathbf{y} \leq \mathbf{z}$ akkor $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$,
(iii) $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ és $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ akkor $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
($m = 0$ esetén minden triviális, $m = 1$ esetén pedig ezzel teljes rendezést kapunk.) A kúp definíciójának megfelel egy lineáris altér is, vagy egy féltér, de ezek tartalmaznak lineáris alteret, és így nem lehet velük részben-rendezést megadni. (Kivéve $m = 0$-t.) Ekkor a fenti három közül melyik tulajdonság nem teljesül?

A d dimenziós Hilbert tér önadjungált operátorai d^2 dimenziós valós vektorteret alkotnak. Lássuk be, hogy a $A \geq 0$ pozitív szemidefinit operátorok ($\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0$ minden $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$-ra) ezen belül egy kúpot alkotnak. Így részben rendezés adható meg az önadjungált mátrixok vektorterében: $A \leq B$ pontosan akkor, ha $0 \leq B - A$.

---

12. feladat – majorálás diszkrét eloszlásokon

Legyenek $\mathbf{p} = (p_1, \dots p_m), \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta_{m-1}$ m elemű diszkrét valószínűségeloszlások. Ekkor $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ ($\mathbf{p}$-t majorálja $\mathbf{q}$) definíció szerint ha

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} q_i^{\downarrow}, \qquad \text{minden } 1 \leq k \leq m\text{-re.}$$

($^{\downarrow}$ a csökkenő sorrendbe rendezést jelenti.) Lássuk be, hogy ez részben-rendezés:
(i) $\mathbf{p} \preceq \mathbf{p}$,
(ii) $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \preceq \mathbf{r}$ akkor $\mathbf{p} \preceq \mathbf{r}$,
(iii) $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \preceq \mathbf{p}$ akkor $\mathbf{p}^{\downarrow} = \mathbf{q}^{\downarrow}$,
valamint néhány más tulajdonságot:
(iv) bármely $\mathbf{p}$ eloszlásra $(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}) \preceq \mathbf{p} \preceq (1, 0, \dots, 0)$,
(v) adott $\mathbf{q}$ eloszlás által majorált eloszlások konvex halmazt alkotnak, vagyis $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \preceq \mathbf{q}$ akkor $0 \leq \lambda \leq 1$-re $(\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2) \preceq \mathbf{q}$,
(vi) minden $\mathbf{p}$, amit majorál egy $\mathbf{q}$, benne van $\mathbf{q}$ elemeinek összes permutációjaként előálló eloszlások konvex burkában.
(vii) Adjunk meg olyan $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta_{m-1}$ elemeket, melyekre $\mathbf{p} \not\preceq \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \not\preceq \mathbf{p}$. Mi az a minimális m, amire ilyen párokat találhatunk?