

Kvantumösszefonódás házi feladat, 2014. március 21. Határidő **2014. április 7.** Kis egysorosak...

A Shannon, a Tsallis és a Rényi entrópiák:

$$S(\mathbf{p}) = - \sum_i p_i \ln p_i,$$
$$S_q^{\text{Ts}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q} \left[\sum_i p_i^q - 1 \right], \quad 0 < q,$$
$$S_q^{\text{R}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_i p_i^q, \quad 0 < q.$$

13. feladat – a Shannon entrópia általánosítása

Lássuk be, hogy $q \rightarrow 1$ esetén mind a Tsallis, mind a Rényi entrópia a Shannon entrópiához tart:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q^{\text{Ts}}(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}), \quad \text{és} \quad \lim_{q \rightarrow 1} S_q^{\text{R}}(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}).$$

14. feladat – általános entrópiák

Azért lesznek ezek „jó entrópiák”, mert Schur-konkávok, (tehát a kevertségről mondanak valamit,) ekkor biztochasztikus leképezések Markov-láncában folyamatosan nemcsökkennek. (f Schur-konkáv, ha $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ esetén $f(\mathbf{p}) \geq f(\mathbf{q})$.) Lássuk be, hogy a Shannon, a Tsallis és a Rényi entrópiák mind Schur-konkávok. (Hint: használjuk az órán tanult tételt a Schur-konvexitásra.)

15. feladat – a Shannon entrópia specialitása

Az a tulajdonság, ami a Shannon entrópiát kiválasztja, a rekurzivitás. Lássuk be az egyszerű alakját: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ eloszlás a $(p_1, p_2, \dots, ap_n, (1-a)p_n)$ eloszlás durvítása, (mint mindig, $0 \leq a \leq 1$.) ekkor a finomabb eloszlás entrópiája nő a durvábbéhoz képest:

$$S((p_1, p_2, \dots, ap_n, (1-a)p_n)) = S((p_1, p_2, \dots, p_n)) + p_n S((a, 1-a)).$$

(Az órán felírt alak ennek következménye, és azért jobb, mert a kvantumos, tenzorszorzatos struktúra jobban látszik majd benne. Viszont ahhoz nagyon sokat kellene írni...)