Kvantumösszefonódás házi feladat, 2014. március 28. Határidő **2014. április 14.**

---

16. feladat – A relatív enrópia nemnegativitása

$\mathbf{p},\mathbf{q}\in\Delta$ *relatív entrópiá*ja, vagy *Kullback-Leibler divergenciá*ja:

$$S(\mathbf{p}||\mathbf{q})=\sum_{i=1}^{d}p_i(\ln p_i-\ln q_i)\qquad \text{ha } p_i=0 \text{ esetén } q_i=0, \text{ különben } \infty.$$

Lássuk be, hogy $S(\mathbf{p}||\mathbf{q})\geq 0$, és $S(\mathbf{p}||\mathbf{q})=0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{p}=\mathbf{q}$.

---

17. feladat – A relatív entrópia jelentéséről

Tekintsünk egy kísérletet 2 kimenetellel, melyek valószínűségeit a $\mathbf{q}=(q,1-q)$ adja meg!
1. Mi lesz a valószínűsége annak, hogy a kísérletet k-szor elvégezve a kimenetelek aránya másik, $\mathbf{p}=(p,1-p)$, $\mathbf{p}\neq\mathbf{q}$ valószínűségekre vezet?
2. Nagy k-ra közelítsük ennek logaritmusát a Stirling formula felhasználásával: $\ln k!\approx k\ln k-k$. Mit találunk ekkor a kérdéses valószínűség exponensében?

---

18. feladat – A relatív entrópia konvexitásáról

Mutassuk meg, hogy a relatív entrópia a két argumentumában *együtt-konvex*, (nem biztos, hogy ezt így fordítják, *jointly convex* angolul,) vagyis

$$S(a\mathbf{p}_1+(1-a)\mathbf{p}_2||a\mathbf{q}_1+(1-a)\mathbf{q}_2)\leq aS(\mathbf{p}_1||\mathbf{q}_1)+(1-a)S(\mathbf{p}_2||\mathbf{q}_2),\qquad 0\leq a\leq 1.$$