19. feladat – 1-qubit kevert állapotok dekompozíciói

Órán volt: Ha $\dim \mathcal{H} = d$, és egy sűrűségmátrix spektrálfelbontása

$$\varrho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \qquad \text{ahol} \qquad \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1,\ \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta^i_j,$$

akkor bármely tetszőleges m elemű ($m \geq d$) konvex dekompozíció

$$\varrho = \sum_{j=1}^{m} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \qquad \text{ahol} \qquad p_j \geq 0,\ \sum p_j = 1,\ \|\psi_j\|^2 = 1,$$

kifejthető a $\sqrt{\lambda_i}|\varphi_i\rangle$ vektorokkal az $U^j{}_i$ kifejtési együttható-mátrixszal, ($m \times d$-s,) melynek oszlopai ortonormáltak ($U^\dagger U = \mathrm{I}_d$, izometria) a következőképpen:

$$\sqrt{p_j}|\psi_j\rangle = \sum_{i=1}^{d} U^j{}_i \sqrt{\lambda_i}|\varphi_i\rangle.$$

Ez volt a Schrödinger's Mixture Theorem.
- Órán láttuk, hogy hogyan írhatók fel az általános dekompozíció p_j keverési súlyai a spektrummal és az $U^j{}_i$ paraméterekkel. Hogyan is?
- Órán láttuk azt is, hogy ebből könnyen következett a HLP-lemma miatt, hogy $\mathbf{p} \preceq \boldsymbol{\lambda}$, vagyis minden dekompozíció $\mathbf{p}$ keverési súlyait majorálják a spektrális felbontás $\boldsymbol{\lambda}$ keverési súlyai, amik a sajátértékek. Miért is?
- Ezek szerint pedig $S(\mathbf{p}) \geq S(\boldsymbol{\lambda})$, vagyis a lehetséges dekompozíciók súlyainak entrópiája (ezt az *adott dekompozícióra vonatkozó keverési entrópiának* is nevezik,) a spektrális dekompozícióra a legkisebb. Miért is? Bármilyen entrópiára, ugye?
- Mutassuk meg egy qubit példáján, hogy ha az állapot nem tiszta, akkor a lehetséges dekompozíciók keverési entrópiája felülről nem korlátos! Tipp: Gondoljunk a $\frac{1}{2}\mathrm{I}$ teljesen kevert állapotra, mely a Bloch gömb közepe! Ennek egy m elemű dekompozíciója egy tetszőleges főkörön egymást $2\pi/m$ szögre követő m tiszta állapot egyenletes $1/m$ súlyokkal. Általánosítsuk a gondolatmenetet tetszőleges

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\big), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad \|\mathbf{x}\| < 1$$

kevert állapotra. Adjuk meg expliciten egy m elemszámú dekompozíciót, írjuk fel a keverési entrópiát (ha ez m-met növelve a végtelenbe tart, akkor jól okoskodtunk), és gyakorlásképpen adjuk meg az $U^j{}_i$ együtthatókat is!

20. feladat – Parciális trace

Legyen $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, ekkor a parciális trace-ek

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{tr}_1 : & \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_2, & \text{illetve} \\ \mathrm{tr}_2 : & \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_1 & \textit{lineáris}\text{ műveletek,} \end{array}$$

melyek egy elemi tenzoron megadva

$$\mathrm{tr}_1(X \otimes Y) = (\mathrm{tr}\,X)Y, \qquad \text{illetve} \qquad \mathrm{tr}_2(X \otimes Y) = X(\mathrm{tr}\,Y),$$

a szokásos trace műveletekkel. (Ez az a $\mathrm{Lin}\,\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ lineáris művelet, ami, megint csak a $|\psi\rangle \otimes \langle\chi| \equiv |\psi\rangle\langle\chi|$ elemi tenzorokon megadva, $\mathrm{tr}\,|\psi\rangle\langle\chi| = \langle\chi|\psi\rangle$). Adjuk meg ennek hatását a mátrixelemeken, vagyis ha

$$M = \sum_{i,j,i',j'=1}^{d_1,d_2,d_1,d_2} M^{ij}{}_{i'j'} |i\rangle\langle i'| \otimes |j\rangle\langle j'|,$$

akkor mik lesznek

$$\mathrm{tr}_1\, M = (\mathrm{tr}_1\, M)^j{}_{j'} |j\rangle\langle j'| \qquad \text{és} \qquad \mathrm{tr}_2\, M = (\mathrm{tr}_2\, M)^i{}_{i'} |i\rangle\langle i'|\text{-beli}$$

$(\mathrm{tr}_1\, M)^j{}_{j'}$ és $(\mathrm{tr}_2\, M)^i{}_{i'}$ mátrixelemek?

---

21. feladat – Redukált állapot

Egy összetett rendszer állapota $\varrho_{12} \in \mathcal{D}_{12}$, hogyan kaphatjuk meg a részrendszer $\varrho_1 \in \mathcal{D}_1$ úgynevezett *redukált állapotát*? Ennek azt kell tudnia, hogy ha az 1-es részrendszeren bármely $A_1 \in \mathcal{A}_1$ önadjungált operátorral jellemzett mennyiséget szeretnénk mérni, ami az $A_{12} = A_1 \otimes \mathrm{I}_2 \in \mathcal{A}_{12}$ operátorral adható meg az összetett rendszeren, akkor mindkét esetben a megfelelő állapotot használva ugyanazt a várható értéket kapjuk:

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1 : \qquad \mathrm{tr}\,\varrho_1 A_1 = \mathrm{tr}\,\varrho_{12} A_{12}.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha ϱ_1-et a fenti parciális trace-szel származtatjuk az eredeti ϱ_{12} állapotból, tehát $\varrho_1 = \mathrm{tr}_2\,\varrho_{12}$. Bizonyítsuk ezt be!