Kvantumösszefonódás házi feladat, 2014. április 11. Határidő **2014. április 28.**

---

22. feladat – Purifikáció

Legyen $\mathcal{H}$ két dimenziós, és $\varrho = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ qubit állapot a szokásos Bloch-vektoros felírással (`HF02.pdf`). Tegyünk hozzá egy másik rendszert (valamilyen alkalmas $\mathcal{H}'$ Hilbert teret használva) és írjuk fel az összetett rendszer egy olyan $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ állapotvektorát, melyből a részrendszer állapota éppen ϱ, vagyis $\varrho = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}'} |\psi\rangle\langle\psi|$.

Most írjuk fel az összes ilyen $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ állapotvektort ha $\dim \mathcal{H}' = 2$. Ezt úgy lehet megtenni, hogy az előző részben kapott $|\psi\rangle$-re hattatjuk az $\mathrm{I} \otimes U$-t, ahol $U \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ unitér. (Tipp: paraméterezzük az unitér mátrixot a következő módon:

$$U = \mathrm{e}^{i\phi/2} \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2), \qquad 0 \le \phi < 2\pi, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad \text{és} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Aki ezt nem tudta, az járjon utána. Spoiler: használjuk az $U^\dagger = U^{-1}$ összefüggést.)
Ez a módszer tényleg megadja az összes ilyen $|\psi\rangle$ vektort? Lesz olyan, hogy két különböző $U \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ ugyanarra a vektorra vezet? Írjuk fel gyakorlásképpen az így elcsavart $|\psi\rangle$-kkel a $|\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotot, majd ellenőrizzük, hogy $\varrho = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}'} |\psi\rangle\langle\psi|$.

---

23. feladat – 2-qubit kanonikus alak

Legyen $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, és a bázis a szokásos gyorsírással $|\varphi_{1,i}\rangle \otimes |\varphi_{2,j}\rangle \equiv |\varphi_{12,ij}\rangle =: |ij\rangle$, és legyen mindkét Hilbert-tér két dimenziós, tehát általában $|\psi\rangle = \psi^{00}|00\rangle + \psi^{01}|01\rangle + \psi^{10}|10\rangle + \psi^{11}|11\rangle$. Legyen most

$$|\psi\rangle = \cos(\alpha)|00\rangle + \sin(\alpha)|11\rangle$$

- Mik lesznek a Schmidt-együtthatók?
- Írjuk fel a $\pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotú sűrűségmátrixot a fenti bázisban,
- valamint a részrendszerek állapotait (redukált sűrűségmátrixok): $\pi_1 = \mathrm{tr}_2\, \varrho$, $\pi_2 = \mathrm{tr}_1\, \varrho$.
- Mi lesz a spektrumuk? Milyen paraméterértékekre lesznek tiszták/kevertek? (Ekkor mi az eredeti állapot?)

---

24. feladat – Egy általánosított mérés

Ez egy tök jó példa azokra az elég absztrakt dolgokra, amik a legutóbbi órán voltak. Nem nehéz, csak hosszan írtam le.

Tekintsünk egy összetett kvantumrendszert, mely két részrendszerből áll! Az egyik egy atom, melynek csak két energiaállapotát tekintjük: Hilbert tere $\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}} = \mathrm{Span}\{|\varphi_{\mathrm{Atom},0}\rangle \equiv |\mathrm{A}\rangle, |\varphi_{\mathrm{Atom},1}\rangle \equiv |\mathrm{G}\rangle\}$, ahol a két ortonormált vektor az „alap” és a „gerjesztett” állapotot jelöli. A másik a fotontér egy módusa, amiben vagy nincs foton, vagy egyetlen foton van: Hilbert tere $\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}} = \mathrm{Span}\{|\varphi_{\mathrm{Foton},0}\rangle \equiv |\mathrm{N}\rangle, |\varphi_{\mathrm{Foton},1}\rangle \equiv |\mathrm{V}\rangle\}$, ahol a két ortonormált vektor a „nincs foton” és a „van foton”. (Itt kivételesen azért erőltetem ezeket a betűs jelöléseket az indexelés helyett, hogy látványosabban különváljon, hogy mi melyik Hilbert-téren lesz.)

Adott időtartam alatt az alapállapotban levő atom p valószínűséggel felvehet egy fotont a fotontérből, és ekkor gerjesztett állapotba ugrik, illetve ugyanekkora valószínűséggel gerjesztett állapotban le is adhat fotont, és ekkor alapállapotba esik.

Szeretnénk megtudni, hogy az atom milyen állapotban van. Ezt a $\{P_{\mathrm{A}} = |\mathrm{A}\rangle\langle\mathrm{A}|, P_{\mathrm{G}} = |\mathrm{G}\rangle\langle\mathrm{G}|\} \subset \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ ortogonális projektorokkal megadott Neumann mérés elárulná, de tegyük fel, hogy ezt nem lehet elvégezni. Mérni csak azt tudjuk, hogy kibocsátott-e egy fotont az atom, vagyis csak a $\{P_{\mathrm{N}} = |\mathrm{N}\rangle\langle\mathrm{N}|, P_{\mathrm{V}} = |\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}|\} \subset \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$ ortogonális projektorokkal megadott Neumann mérést tudjuk elvégezni, melynek kimenetei a „nincs foton” és a „van foton”.

A mérés előtt az atom állapotát a $\varrho_{\mathrm{Atom}} \in \mathcal{D}_{\mathrm{Atom}}$ sűrűségoperátor adja meg. Legyen a fotontér „üres” a mérés előtt, ez $\varrho_{\mathrm{Foton}} = |\mathrm{N}\rangle\langle\mathrm{N}| \in \mathcal{D}_{\mathrm{Foton}}$! Legyen az adott ideig tartó kölcsönhatásból származó unitér operátor mátrixa

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a fenti bázisokból képzett szorzat-bázisban: $|\mathrm{A}\rangle\otimes|\mathrm{N}\rangle, |\mathrm{A}\rangle\otimes|\mathrm{V}\rangle, |\mathrm{G}\rangle\otimes|\mathrm{N}\rangle, |\mathrm{G}\rangle\otimes|\mathrm{V}\rangle$. Mit jelentenek U mátrixelemei? Ugye unitér?

Ha megszólal a fotodetektor a kölcsönhatás alatt, az a $P_{\mathrm{V}} = |\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}| \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$ projektornak megfelelő esemény bekövetkezését jelenti, ha nem, az a $P_{\mathrm{N}} = |\mathrm{N}\rangle\langle\mathrm{N}| \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$-ét. Most azt nézzük meg, mi lesz az atom állapota ez után. Ezt a mérést megadhatjuk a következő teljesen pozitív leképezésekkel, melyeket az imént elmondottak alapján hegesztünk össze a „nincs foton” és a „van foton” kimenetelekhez

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) &= \mathrm{tr}_{\mathrm{Foton}}\Big[(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{N}})U(\varrho_{\mathrm{Atom}}\otimes\varrho_{\mathrm{Foton}})U^\dagger(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{N}})^\dagger\Big], \\ \Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) &= \mathrm{tr}_{\mathrm{Foton}}\Big[(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{V}})U(\varrho_{\mathrm{Atom}}\otimes\varrho_{\mathrm{Foton}})U^\dagger(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{V}})^\dagger\Big]. \end{aligned}$$

Írjuk fel a $\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}), \Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ operátorok mátrixait! Ugye ezek a leképezések nem mövelik a nyomot? Ezekkel a mérés utáni állapotok a két esetben

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathrm{Atom}} &\quad\longmapsto\quad \varrho'_{\mathrm{Atom,N}} = \frac{1}{p_{\mathrm{N}}}\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}), \qquad p_{\mathrm{N}} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}), \\ \varrho_{\mathrm{Atom}} &\quad\longmapsto\quad \varrho'_{\mathrm{Atom,V}} = \frac{1}{p_{\mathrm{V}}}\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}), \qquad p_{\mathrm{V}} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}). \end{aligned}$$

Írjuk fel ezeket is! Ugye $p_{\mathrm{N}} + p_{\mathrm{V}} = 1$? (Ha nem, akkor valamit elrontottunk…) Mire következtethetünk az egyes kimenetelekből („nincs foton”, „van foton”) az atom állapotára („alap”, „gerjesztett”)? Illetve írjuk fel a nem-szelektív mérés eredményét is:

$$\varrho_{\mathrm{Atom}} \quad\longmapsto\quad \varrho'_{\mathrm{Atom}} = p_{\mathrm{N}}\varrho'_{\mathrm{Atom,N}} + p_{\mathrm{V}}\varrho'_{\mathrm{Atom,V}}.$$

Ugye $\mathrm{tr}\,\varrho'_{\mathrm{Atom}} = 1$?

Most határozzuk meg a Kraus operátorokat, vagyis a

$$\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = M_{\mathrm{N}}\varrho_{\mathrm{Atom}}M_{\mathrm{N}}^{\dagger},$$
$$\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = M_{\mathrm{V}}\varrho_{\mathrm{Atom}}M_{\mathrm{V}}^{\dagger}$$

képletekben szereplő M_{N} és $M_{\mathrm{V}} \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ operátorok mátrixait! (Ebben a példában elegendő egyetlen Kraus operátor mindkét kimenethez, nem kell több ilyen hatását j-re felösszegezni, $\sum_j M_{\mathrm{N},j}\varrho_{\mathrm{Atom}}M_{\mathrm{N},j}^{\dagger}$, ami az órán tekintett teljesen általános eset volt. Aki még nem fáradt, az órai levezetés alapján meggondolhatja, hogy ez azért van, mert 1-rangú projektorok reprezentálták a „nincs foton” és a „van foton” eseményeket $\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$ téren.) Ugye igaz, hogy $M_{\mathrm{N}}^{\dagger}M_{\mathrm{N}} \leq \mathrm{I}$ és $M_{\mathrm{V}}^{\dagger}M_{\mathrm{V}} \leq \mathrm{I}$? (Önadjungált mátrixokra $A \leq B$, ha $0 \leq B - A$.)

A kimeneti valószínűségek a trace ciklikussága miatt

$$p_{\mathrm{N}} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = \mathrm{tr}\,M_{\mathrm{N}}^{\dagger}M_{\mathrm{N}}\varrho_{\mathrm{Atom}}, \qquad E_{\mathrm{N}} := M_{\mathrm{N}}^{\dagger}M_{\mathrm{N}},$$
$$p_{\mathrm{V}} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = \mathrm{tr}\,M_{\mathrm{V}}^{\dagger}M_{\mathrm{V}}\varrho_{\mathrm{Atom}}, \qquad E_{\mathrm{V}} := M_{\mathrm{V}}^{\dagger}M_{\mathrm{V}},$$

vagyis megkaphatóak a $\{E_{\mathrm{N}}, E_{\mathrm{V}}\} \subset \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ pozitív operátor értékű mérték (POVM) felhasználásával. Írjuk fel ezek mátrixait, illetve ellenőrizzük, hogy $E_{\mathrm{N}} + E_{\mathrm{V}} = \mathrm{I}_{\mathrm{Atom}}$. Mi lesz ezeknek a spektrálfelbontása? Ezek a $\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ Hilbert téren hatnak, bennük az Atom állapotára vonatkozó események konvex kombinációja jelenik meg. Gondolkozzunk el a jelentésén: vagyis milyen járulékok jöhetnek az atom állapotaiból a fotonszám mérésbe?