25. feladat – Majorálás kvantumállapotokon

Klasszikus esetben igaz volt, hogy egy állapot által majorált állapotok egy konvex halmazban vannak, amit az állapot összes permutáltjának konvex burkaként kapunk, vagyis $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta$,

$$\mathbf{p} \preceq \mathbf{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1 \quad \text{hogy} \quad \mathbf{p} = \sum_i a_i S_i \mathbf{q},$$

ahol S_i-k permutációs mátrixok, tehát elegendő, ha i maximum $d!$-ig megy, ahol d az eloszlások hossza. (Igazából a Carathéodory tétel miatt d is elég lenne...) Bizonyítsuk be az állítás kvantumos megfelelőjét (Uhlmann majorálási tétel): $\varrho, \sigma \in \mathcal{D}$,

$$\varrho \preceq \sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1 \quad \text{hogy} \quad \varrho = \sum_i a_i U_i \sigma U_i^\dagger,$$

ahol $U_i \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ unitér operátorok, és – noha végtelen sok unitér mátrix van, de – elegendő, ha i maximum $d!$-ig megy, ahol $d = \dim \mathcal{H}$. (A majorálás kvantumállapotokon a klasszikus állapotokon értelmezettel definiált: $\varrho \preceq \sigma$ definíció szerint ha $\operatorname{Spect} \varrho \preceq \operatorname{Spect} \sigma$. A klasszikus állapotokon pedig lásd a 12. feladatban (`HF04.pdf`).)

---

26. feladat – Majorálás qubiteken

Legyen $\dim \mathcal{H} = 2$ (qubit), rajta $\varrho, \omega \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokkal, melyek Bloch-vektoros felírása (lásd 7. feladat, (`HF03.pdf`)):

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\big), \quad \omega = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{y}\boldsymbol{\sigma}\big), \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq 1.$$

Mit jelent az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ Bloch-vektorok nyelvén, hogy $\varrho \preceq \omega$?

---

27. feladat – Araki-Lieb háromszög-egyenlőtlenség

Legyen $\varrho_{12} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ az összetett rendszer állapota, és $\varrho_1 = \operatorname{tr}_2 \varrho_{12} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$ valamint $\varrho_2 = \operatorname{tr}_1 \varrho_{12} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_2)$ a részrendszereké. Bizonyítsuk be a Neumann-entrópiára vonatkozó Araki-Lieb háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|S(\varrho_2) - S(\varrho_1)| \leq S(\varrho_{12}).$$

(Hint: A bizonyításhoz használjuk a purifikációs trükköt (Találhatunk olyan $\mathcal{H}_3$ Hilbert teret, és $\varrho_{123} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$, *tiszta* állapotot, amire $\operatorname{tr}_3 \varrho_{123} = \varrho_{12}$, és Schmidt dekompozíciót.) illetve a Neumann-entrópia szubadditivitását. Ezekből könnyen jön az eredmény.) (Miért háromszög-egyenlőtlenség?)