---

28. feladat – A kvantum relatív entrópia pozitivitása

A kvantum relatív entrópia: $\varrho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokra

$$S(\varrho\|\sigma) = \operatorname{tr}\varrho(\ln\varrho - \ln\sigma).$$

Bizonyítsuk be, hogy ez nemnegatív, és 0 akkor és csak akkor, ha $\varrho = \sigma$.

Ehhez bizonyítsunk egy erősebb állítást:

$$S(\varrho\|\sigma) \geq \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\sigma - \varrho)^2.$$

(Hint: Ehhez igazoljuk, majd használjuk fel a következő, $\eta(x) = -x\ln x$ függvényre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$-\eta(x) + \eta(y) + (x-y)\eta'(y) \geq \frac{1}{2}(x-y)^2,$$

ahol a $'$ deriválást jelent. Ezt követően használjuk fel a mátrixkalkulusbeli eredményt, hogy ha c_k valós számokra, f_k, g_k valós függvényekre $\sum_k c_k f_k(x) g_k(y) \geq 0$, akkor ha x és y helyére A és B önadjungált mátrixokat írunk, akkor igaz a összefüggés a nyomra: $\sum_k c_k \operatorname{tr}\big(f_k(A)g_k(B)\big) \geq 0.$)

---

29. feladat – Qubitek relatív entrópiája

Legyen $\dim\mathcal{H} = 2$ (qubit), rajta $\varrho, \omega \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokkal, melyek Bloch-vektoros felírása (lásd 7. feladat, (`HF03.pdf`)):

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\big), \quad \omega = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{y}\boldsymbol{\sigma}\big), \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq 1.$$

Adjunk meg valamilyen nem túl szörnyen kinéző formulát ezek kvantum relatív entrópiájára (lásd fent). (Ez az unitér invariancia miatt felírható csupán a két Bloch-vektor hosszával és közbezárt szögükkel. Az viszont általában nem igaz, hogy a kvantum relatív entrópia a spektrumok klasszikus relatív entrópiája lesz. Van olyan eset, amikor mégis?)

---

30. feladat – Két qubit operátorok, sűrűségmátrixok

Tekintsük ismét két qubit rendszerét, $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\dim\mathcal{H}_1 = \dim\mathcal{H}_2 = 2$. A $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ lineáris operátorait szokásosan felírhatjuk a Pauli mátrixokat használva bázisként: $\{\sigma_0 \equiv \mathrm{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, ebből adódott a Bloch-vektoros felírás egy qubitre. A $\mathcal{H}_{12}$ lineáris operátorainak terén ekkor bázist alkotnak a Pauli mártixokból képzett elemi tenzorok $\{\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu \mid \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$. Egy két-qubit állapot ekkor felírható pl

$$\varrho = \sum_{iji'j'=0}^{1} \varrho^{i}{}_{i'}{}^{j}{}_{j'} |i\rangle\langle i'| \otimes |j\rangle\langle j'| = \sum_{\mu\nu=0}^{3} R^{\mu\nu} \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{I}\otimes\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathrm{I} + \mathrm{I}\otimes\mathbf{y}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}\Big],$$

ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, és a gyorsírás $\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} x^i \sigma_i$, $\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma} = \sum_{ij=1}^{3} z^{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$. Gondolhatunk rá úgy is, mint

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{y} \\ \hline \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4.$$

Adjuk meg a redukált sűrűségmátrixokat mindhárom iménti alakra! Hogy néznek ki az R együtthatók korrelálatlan ($\varrho = \varrho_1 \otimes \varrho_2$) állapotra?

Sajnos most az R (vagy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) együtthatókkal nem tudjuk általánosan megfogalmazni, hogy milyen értékekre lesz $\varrho \geq 0$. (Egy qubitnél ezt egyszerűen a Bloch-vektor hosszával meg lehetett adni.) Viszont tekinthetünk speciális eseteket. Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{z}$ diagonális! Hívjuk ezt *Pauli-diagonális* állapotnak! Írjuk fel ekkor ϱ mátrixát, számoljuk ki a sajátértékeit, és adjuk meg, hogy milyen $\mathbf{z}$ értékekre lesz pozitív szemidefinit, (látunk itt valami geometriát a paraméterek $(z^{11}, z^{22}, z^{33}) \in \mathbb{R}^3$ vektorára?) valamint milyen $\mathbf{z}$ értékekre lesz tiszta állapot!

A Bell-állapotok a két-qubit Hilbert-téren

$$\begin{aligned}
|\mathrm{B}_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big) = \sigma_0 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle,\\
|\mathrm{B}_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big) = \sigma_1 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle,\\
|\mathrm{B}_2\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big) = \sigma_2 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle,\\
|\mathrm{B}_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big) = \sigma_3 \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle
\end{aligned}$$

teljes ortonormált rendszert alkotnak, lokális-unitér ekvivalensek egymással, és mindannyian maximálisan összefontak. Vegyünk egy olyan sűrűség mátrixot, amely ezek keveréke: $\varrho = \sum_{\mu=0}^{3} p_\mu |\mathrm{B}_\mu\rangle\langle\mathrm{B}_\mu|$, ahol $p_\mu \geq 0$, $\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu = 1$. Ezt *Bell-diagonális állapotnak* hívjuk, és a $\mathbf{p}$ súlyoktól függ, amik a 3-dimenziós szimplexben vannak. Ez konstrukcióból adódóan pozitív szemidefinit. Mik lesznek ennek az $R^{\mu\nu}$ kifejtési együtthatói? Akkor most már látjuk, hogy mi lesz a Pauli-diagonális állapotok geometriája?

(Ez csak lazán kapcsolódik: Legyen a „Flip” operátor $F \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{12}$, aminek hatása $F|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$. Írjuk fel a mátrixát, és fejtsük ki a fenti Pauli-bázison!)

Nézzünk meg még két dolgot! Ezek a kevert állapotok szeparálhatóságával kapcsolatosak, amikről majd az utolsó órán lesz szó, de addig is jó kis házikat lehet belőle adni.

Egyrészt legyen a tenzotszorzat-Hilbert tér lineáris leképezéseinek parciális transzponáltja az a lineáris leképezés, ami elemi tenzorokon megadva $(A \otimes B)^{t_1} = A^t \otimes B$. Tekintsünk egy Bell-diagonális állapotot! Milyen paraméterekre lesz a parciális transzponáltja pozitív szemidefinit?

Másrészt nézzük meg, milyen paraméterekre majorálja a ϱ Bell-diagonális állapotot az ő $\varrho_1 = \mathrm{tr}_2\,\varrho$ marginálisa? (A majorálás kvantumállapotokon a klasszikus állapotokon értelmezettel definiált: $\varrho \preceq \sigma$ definíció szerint ha $\mathrm{Spect}\,\varrho \preceq \mathrm{Spect}\,\sigma$. A klasszikus állapotokon pedig lásd a 12. feladatban (`HF04.pdf`).)

(Akinek az utóbbi két feladat kissé nehéz, az próbálkozhat egy speciális 1-paraméteres Bell-diagonális állapottal, ami a zajjal kevert Bell-0-állapot: $\varrho = p\frac{1}{2}\mathrm{I}\otimes\frac{1}{2}\mathrm{I}+(1-p)|\mathrm{B}_0\rangle\langle\mathrm{B}_0|$. Ugye tényleg Bell-diagonális?)