31. feladat – A Bell-egyenlőtlenséghez

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ két feles spin összetett rendszere: $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$. Feles spin esetén a három ortogonális spin-irányhoz tartozó operátorok $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ (gyorsírással $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$), és az adott $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{a}\|^2 = 1$ irányú spin-mérés operátora $S_{\mathbf{a}} = \sum_i a_i S_i$ (gyorsírással $S_{\mathbf{a}} = \mathbf{aS}$). Az összetett rendszer két részrendszerén a megfelelő mérhető mennyiségek operátorai $S_{\mathbf{a}} \otimes \mathrm{I}$ és $\mathrm{I} \otimes S_{\mathbf{b}}$, a spin-korrelációs méréshez tartozó obszervábilis $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = (S_{\mathbf{a}} \otimes \mathrm{I})(\mathrm{I} \otimes S_{\mathbf{b}}) = S_{\mathbf{a}} \otimes S_{\mathbf{b}}$.
a.) Számítsuk ki az

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \langle\psi|S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|\psi\rangle$$

várhatóértéket a $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ szinglet-állapotban! (Órán felírtam, most számoljuk ki.)
b.) A Bell-egyenlőtlenség

$$\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{-2} \big|E(\mathbf{a},\mathbf{b}) - E(\mathbf{a},\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}) + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}')\big| \leq 2,$$

keressünk legylább egy olyan $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ mérési irány-készletet, amikre ez sérül!

Hogy ne csak az ismert dolgok legyenek, gyengítsük egy kicsit a lehetőségeinket: tudjuk sérteni az egyenlőtlenséget nem teljesen összefont állapottal is? Erről szól a következő két részfeladat:
c.) Számoljuk ki az $E(\mathbf{a},\mathbf{b})$ várhatóértéket a $|\psi'(\eta)\rangle = \sqrt{\eta}|01\rangle - \sqrt{1-\eta}|10\rangle$ állapotban! ($0 \leq \eta \leq 1$, ez lokális-unitér ekvivalens a szokásos Schmidt alakkal, de ezzel kicsit szebben lehet számolni. Az a lényeg, hogy az η paraméterrel folytonosan változtatjuk az állapot összefontságát, lásd a 33.f feladatban.)
d.) A b.) feladatban talált $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ mérési beállításokkal milyen intervallumba eshet η ahhoz, hogy a Bell-egyenlőtlenség sérüljön? (Vagyis milyen az a legkevésbé összefont állapot, amivel még sérteni lehet az egyenlőtlenséget?)
e.) Sok plusz pontért: Mutassuk meg, hogy bármely kis (de nem nulla) összefontság esetén lehet találni olyan mérési beállításokat, amivel a Bell-egyenlőtlenség sérthető! (Azért sok plusz pontért, mert nem néztem meg, hogy meg lehet-e így csinálni... Más megközelítésből viszonylag könnyen adódik, remélem, eljutunk odáig kövektező órán!)

---

32. feladat – Teleportáláshoz

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ két feles spin összetett rendszerének Hilbert-tere: $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$. A Bell-állapotok ezen a Hilbert-téren $|\mathrm{B}_0\rangle, |\mathrm{B}_1\rangle, |\mathrm{B}_2\rangle, |\mathrm{B}_3\rangle$, lásd a 30. feladatban (`HF10.pdf`).

Az órán lesz szó a teleportálási protokollról, amiben három qubit vesz részt: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = \dim \mathcal{H}_3 = 2$. A számításánál kihasználjuk az e tér megfelelő elemeire vonatkozó alábbi egyenlőséget:

$$|\chi\rangle \otimes |\mathrm{B}_0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} |\mathrm{B}_j\rangle \otimes \big(\sigma_j|\chi\rangle\big).$$

Számoljuk ki, hogy tényleg így van! (Itt is lehet fát vágni, de aki a 30. feladatban rájött, hogy milyen szép alakja van a flip operátornak a Pauli-mátrixokkal, az ezt könnyen felírva három részrendszerben az első és a harmadik cseréjére, nagyon gyorsan célt ér.)

---

33. feladat – Konkurrencia

Legyen $\varrho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ sűrűség mátrix, és $\dim \mathcal{H} = d$. A konkurrencia-négyzet a $q = 2$ paraméterű Tsallis-entrópia normált változata:

$$C^2(\varrho) = \frac{d}{d-1} S_2^{\mathrm{Ts}}(\varrho) = \frac{d}{d-1}\big(1 - \operatorname{tr}\varrho^2\big),$$

tehát ez is a sűrűség mátrix kevertségét jellemzi. (Egyébként az I identitás operátor szórásnégyzetével kapcsolatos.)
a.) Ellenőrizzük, hogy $C^2(\varrho) \leq 1$, és ezt a maximumot fel is veszi!
b.) Legyen $d = 2$ (qubit)! Ekkor $C^2(\varrho)$ arányos lesz a sűrűség mátrix egy invariánsával. Hogy fog kinézni? (Ismét lehet fát vágni, de használhatjuk a Cayley-Hamilton tételt is.)
c.) Szintén qubitre, használjuk a sűrűségmátrix Bloch-vektoros felírását: $\varrho = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})$, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{x}\|^2 \leq 1$ a Bloch-vektor a spin iránya. Számítsuk ki $C^2(\varrho)$-t ekkor!

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ két részrendszer összetett rendszerének Hilbert-tere, és $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ tiszta állapot a $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vektorral megadva. ($|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{1} \psi^{ij}|ij\rangle$) Ennek a *tiszta* állapotnak az összefontságának mértékét jellemzi az összetett tiszta állapot konkurrencia-négyzete, (írott nagy $\mathcal{C}$,) ami a részrendszer kevertségének mértéke annak konkurrencia-négyzetével:

$$\mathcal{C}^2(\psi) = C^2(\pi_1), \qquad \text{ahol} \quad \pi_1 = \operatorname{tr}_2 \pi, \quad \pi = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

d.) Ugye igaz, hogy $C^2(\pi_1) = C^2(\pi_2)$, ha π_1 és π_2 egy tiszta állapot két redukáltja?
e.) Két qubit esetén, felhasználva a b.) feladatban kapott eredményt, könnyen kapunk erre egy formulát a ψ^{ij} „kifejtési-együttható mátrix” egy invariánsával. Mi lesz ez a formula?
f.) Ismét két qubitre, legyen $|\psi(\eta)\rangle = \sqrt{\eta}|00\rangle + \sqrt{1-\eta}|11\rangle$ Schmidt-kanonikus alak. Számoljuk ki a $\mathcal{C}^2(\psi(\eta))$ konkurrenciáját! Ugyanannyi lesz, mint az előző feladatbeli $|\psi'(\eta)\rangle$ állapotra? Milyen η paraméterek esetén lesz az állapot szeparálható ($\mathcal{C}^2 = 0$), és mikor lesz maximálisan összefont ($\mathcal{C}^2$ maximális)?