Kvantumösszefonódás házi feladat, 2016. március 18. Határidő **2016. április 4.**, vagy egy kicsit később... Most csak két feladat lesz, de a második kettőt ér.

A következő feladathoz jól jön a Pauli-mátrixok ismert szorzása:

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\mathrm{I} + i\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{jkl}\sigma_l, \tag{1}$$

ami miatt

$$(\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{y}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{x}\mathbf{y})\mathrm{I} + i(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\boldsymbol{\sigma},$$

és nem is kell mátrixot szorozni :-)

7. feladat – forgáscsoport

(Ez részben volt matmódszerekből, de jó felidézni, hogy teljesebb legyen a kép.) Legyen $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ ($\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = 1$) egységvektor, $\gamma \in \mathbb{R}$ szög, és képezzük az

$$U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = \mathrm{e}^{-i\frac{\gamma}{2}\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}} \tag{2}$$

mátrixot.

(a) Ujjgyakorlatként végezzük el az exponencializálást: vagyis kérdés az r skalár és az $\mathbf{r}$ vektor, amikre $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = r\mathrm{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$.

(b) Ha ez megvan, akkor ebből könnyen kiszámolható $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ determinánsa. Do it! (Igazából máshogy is lehet, nem csak az (a) eredményéből.)

(c) Mi lesz $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ hatása a Bloch-gömbön:

$$\begin{array}{lll} \varrho & \longmapsto & U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\varrho U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)^\dagger, \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbf{x}' = R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x}, \qquad R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = ? \end{array}$$

Egy forgatást kell kapni a Bloch-gömbön, de hogy ez tényleg egy forgatási mátrix, azt a következő részfeladatból és az azt követő megjegyzésből fogjuk megtudni:

(d) Vegyük a következő mátrixokat:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

és jelöljük: $\mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma} = x_1\Sigma_1 + x_2\Sigma_2 + x_3\Sigma_3$. Ennek hatása vektoriális szorzás $\mathbf{x}$-szel: $(\mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{y} = i(\mathbf{x}\times\mathbf{y})$. Ezekkel legyen

$$R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = \mathrm{e}^{-i\gamma\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\Sigma}}. \tag{4}$$

Végezzük el az exponencializálást! Ez az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ mátrix meg kell, hogy egyezzen a (c) feladatban kapott mátrixszal.

Megjegyzés. $\frac{1}{2}\sigma_i$ és Σ_i ugyanannak a Lie-algebrának a 2 és 3 dimenziós ábrázolásai: mindkettőre igaz, hogy

$$[J_j, J_k] = i\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{jkl}J_l,$$

ami az $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ Lie algebrát adja meg, ennek lesz $\frac{1}{2}\sigma_i$ és Σ_i a $j = \frac{1}{2}$-es és $j = 1$-es spinű ábrázolásai. Ekkor az exponenciális leképezéssel (lásd az (2) és (4) egyenletek) $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ és az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ mátrixok a SU(2) Lie csoport $j = \frac{1}{2}$-es és $j = 1$-es spinű ábrázolásai. (A 2 dimenziós a „definiáló" ábrázolás.) A $j = 1$-es spinű ábrázolás megadja az SO(3)-nak (ami a három dimenziós tér forgatásai) is a 3 dimenziós (definiáló) ábrázolását. Az $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)^\dagger = (R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}$ miatt SU(2) kétszeresen fedi SO(3)-at: $\pm U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ ugyanazt az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$-t adja.

Általánosan igaz, hogy az SU(d) Lie-csoport $d^2 - 1$ (önadjungált, nyomtalan) generátora megadható úgy, hogy szorzásuk a

$$\sigma_j\sigma_k = \frac{2}{d}\delta_{jk}\mathrm{I} + \sum_{l=1}^{d^2-1}\big(d_{jkl} + if_{jkl}\big)\sigma_l \tag{5}$$

szabálynak tegyen eleget, ahol a d_{jkl} és f_{jkl} együtthatók valósak, és d_{jkl} az indexek permutálására teljesen szimmetrikus, f_{jkl} pedig teljesen antiszimmetrikus. (Az SU(2) esetén (1) speciálisan $d_{jkl} = 0$, $f_{jkl} = \epsilon_{jkl}$.)

8. feladat – qutrites

Qutritek esetén $\dim\mathcal{H} = d = 3$, az önadjungált lineáris operátorok valós vektorterében használhatjuk a $\{\mathrm{I}, \sigma_j \mid j = 1, 2, \dots 8\}$ bázist, ahol I az identitás mátrixszal, σ_j-k pedig az SU(3) generátoraival, az úgynevezett Gell-Mann mátrixokkal megadott operátorok. Ezek szokásos reprezentációja:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad \sigma_5 = \begin{bmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{bmatrix},$$

$$\sigma_6 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad \sigma_7 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{bmatrix},\qquad \sigma_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

Ekkor egy qutrit állapota megadható a

$$\varrho = \frac{1}{3}\mathrm{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$$

sűrűségoperátorral, ahol $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^8$ az *általánosított Bloch vektor*, csak most – a qubitek esetével ellentétben, – nem tudjuk megadni azt a $C \in \mathbb{R}^8$ kompakt konvex halmazt (vagyis konvex testet), amin belüli $\mathbf{r}$ vektorok ténylegesen állapotot adnak meg, vagyis pozitív szemidefinit önadjungált operátort. (Itt most kicsit más normálást használunk, mint a qubiteknél.) Írjuk fel ϱ mátrixát! Tekintsünk speciális eseteket, vagyis rögzítsünk néhány koordinátát! Milyen lehetséges értékeket vehetnek fel a következő speciális $\mathbf{r}$ vektorokban szereplő paraméterek?
$(0, 0, \dots r_j, \dots, 0)$ (csak egyetlen együttható nem nulla),
$(0, 0, r_3, 0, 0, 0, 0, r_8)$ (diagonális),
$(r_1, r_2, r_3, 0, 0, 0, 0, 0)$ (na ez vajon mi?),
$(0, 0, r_3, r_4, r_5, 0, 0, \sqrt{3}r_3)$ (és ez?),
$(r_1, 0, 0, r_4, 0, r_6, 0, 0)$ (egy kicsit érdekesebb).
Szorgalmi: határozzuk meg a d_{jkl} és f_{jkl} együtthatókat! (Használjuk ki a szimmetriát, antiszimmetriát! Lehet, hogy ez még így is túl sok vesződség papíron, szóval írhattok rá programot.)

---

9. feladat – Douglas Hofstadter tiszteletére

A 7. feladat kicsit hosszú, úgyhogy kettőt ér. A harmadik feladat most csak pluszpontért van: találjatok ki valamilyen frappáns, fizikailag motivált problémafelvetésből adódó feladatot a mai óra anyagához, és további pluszpontért oldjátok meg! (Március 18, a konvex halmazos témakör.)