

10. feladat – Két klasszikus bit

Legyen X és Y két valószínűségi változó, értékészletük (x_0, x_1) és (y_0, y_1) , együttes eloszlásuk

$$(\mathbf{p}_{X,Y})_{i,j} = p_{X,Y;i,j} = \text{Prob}(\text{„}X\text{-et mérve } x_i\text{-t kapom és } Y\text{-t mérve } y_j\text{-t kapom}\text{”}),$$

vagyis $\mathbf{p}_{X,Y} = (p_{X,Y;0,0}, p_{X,Y;0,1}, p_{X,Y;1,0}, p_{X,Y;1,1}) \in \Delta_{X,Y} \subset \mathbb{R}^4$. Mik lesznek a margi-
nálisok, vagyis

$$(\mathbf{p}_X)_i = p_{X;i} = \text{Prob}(\text{„}X\text{-et mérve } x_i\text{-t kapom}\text{”}),$$

$$(\mathbf{p}_Y)_j = p_{Y;j} = \text{Prob}(\text{„}Y\text{-t mérve } y_j\text{-t kapom}\text{”}).$$

Írjuk fel a $\delta_{X,i}$, $\delta_{Y,j}$ marginális és $\delta_{X,Y;i,j}$ együttes tiszta állapotokat is! Nézzük meg, hogy $\delta_{X,Y;i,j} = \delta_{X,i} \otimes \delta_{Y,j}$! Tiszta állapot marginálisa tiszta? Másrészt adjunk meg egy egyenletet a korrelálatlan állapotokra, vagyis amikor $\mathbf{p}_{X,Y} = \mathbf{p}_X \otimes \mathbf{p}_Y$.

11. feladat – Parciális trace

Legyen $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, ekkor a parciális trace-ek

$$\begin{aligned} \text{tr}_1 : \text{Lin } \mathcal{H}_{12} &\longrightarrow \text{Lin } \mathcal{H}_2, & \text{illetve} \\ \text{tr}_2 : \text{Lin } \mathcal{H}_{12} &\longrightarrow \text{Lin } \mathcal{H}_1 & \text{lineáris műveletek,} \end{aligned}$$

melyek egy elemi tenzoron megadva

$$\text{tr}_1(X \otimes Y) = (\text{tr } X)Y, \quad \text{illetve} \quad \text{tr}_2(X \otimes Y) = X(\text{tr } Y),$$

a szokásos trace műveletekkel. (Ez az a $\text{Lin } \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ lineáris művelet, ami, megint csak a $|\psi\rangle \otimes \langle\chi| \equiv |\psi\rangle\langle\chi|$ elemi tenzorokon megadva, $\text{tr } |\psi\rangle\langle\chi| = \langle\chi|\psi\rangle$). Adjuk meg ennek hatását a mátrixelemeken, vagyis ha

$$M = \sum_{i,j,i',j'=1}^{d_1,d_2,d_1,d_2} M^{ij}_{i'j'} |i\rangle\langle i'| \otimes |j\rangle\langle j'|,$$

akkor mik lesznek

$$\text{tr}_1 M = (\text{tr}_1 M)^j_{j'} |j\rangle\langle j'| \quad \text{és} \quad \text{tr}_2 M = (\text{tr}_2 M)^i_{i'} |i\rangle\langle i'|\text{-beli}$$

$(\text{tr}_1 M)^j_{j'}$ és $(\text{tr}_2 M)^i_{i'}$ mátrixelemek? (Nem emlékszem, hogy órán mondtam-e, de gyakran használjuk a $|i\rangle := |\varphi_i\rangle$ gyorsírást egy rögzített ortonormált bázis elemeire.)

A Pauli operátorok szokásos mátrixai:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

12. feladat – Két qubit operátorok, sűrűségmátrixok

Tekintsük két qubit rendszerét, $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$. A \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 lineáris operátorait szokásosan felírhatjuk a Pauli mátrixokat használva bázisként: $\{\sigma_0 \equiv I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, ebből adódott a Bloch-vektoros felírás egy qubit állapotaira. A \mathcal{H}_{12} lineáris operátorainak terén ekkor bázist alkotnak a Pauli mátrixokból képzett elemi tenzorok $\{\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu \mid \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$. Egy két-qubit állapot ekkor felírható pl

$$\varrho = \sum_{ij'i'j'=0}^1 \varrho_{i'j'ij}^i |i\rangle\langle i'| \otimes |j\rangle\langle j'| = \sum_{\mu\nu=0}^3 R^{\mu\nu} \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu = \frac{1}{4} [I \otimes I + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} \otimes I + I \otimes \mathbf{y}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{z}\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}],$$

ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, és a gyorsírás $\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 x^i \sigma_i$, $\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} = \sum_{ij=1}^3 z^{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$. Gondolhatunk rá úgy is, mint

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{y} \\ \hline \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4.$$

Adjuk meg a redukált sűrűségmátrixokat mindhárom iménti alakra! Hogy néznek ki az R együtthatók korrelálatlan ($\varrho = \varrho_1 \otimes \varrho_2$) állapotokra?

Sajnos most az R (vagy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) együtthatókkal nem tudjuk általánosan megfogalmazni, hogy milyen értékekre lesz $\varrho \geq 0$. (Egy qubitnél ezt egyszerűen a Bloch-vektor hosszával meg lehetett adni.) Viszont tekinthetünk speciális eseteket. Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ és \mathbf{z} diagonális! Hívjuk ezt *Pauli-diagonális* állapotnak! Írjuk fel ekkor ϱ mátrixát, számoljuk ki a sajátértékeit, és adjuk meg, hogy milyen \mathbf{z} értékekre lesz pozitív szemidefinit, (látunk itt valami geometriát a paraméterek $(z^{11}, z^{22}, z^{33}) \in \mathbb{R}^3$ vektorára?) valamint milyen \mathbf{z} értékekre lesz tiszta állapot!

A Bell-állapotok a két-qubit Hilbert-téren

$$\begin{aligned} |B_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), & |B_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |B_2\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), & |B_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \end{aligned}$$

Ezt *Mágikus bázisnak* is szokták hívni. Ellenőrizzük le, hogy tényleg bázis, vagyis, hogy ezek teljes ortonormált rendszert alkotnak \mathcal{H}_{12} -ben! (Válalkozó szelleműeknek: Ellehőrizzük le azt is, hogy tényleg mágikus!) Másrészt ezek lokális unitér ekvivalensek egymással,

ehhez gyakorlásként mutassuk meg, hogy $|B_\mu\rangle = \sigma_\mu \otimes I|B_0\rangle$ (írjuk ki a $|B_\mu\rangle$ vektorokat és $\sigma_\mu \otimes I$ mátrixokat)! Vegyünk egy olyan sűrűség mátrixot, amely ezek keveréke: $\varrho = \sum_{\mu=0}^3 p_\mu |B_\mu\rangle\langle B_\mu|$, ahol $p_\mu \geq 0$, $\sum_{\mu=0}^3 p_\mu = 1$. Ezt *Bell-diagonális állapotnak* hívjuk, és a $\mathbf{p} \in \Delta_3 \subset \mathbb{R}^4$ súlytól függ, ami a 3-dimenziós szimplexben van. Ez konstrukcióból adódóan pozitív szemidefinit. Mik lesznek ennek az $R^{\mu\nu}$ kifejtési együtthatói? (Ehhez számoljuk ki a $\pi_\mu = |B_\mu\rangle\langle B_\mu|$ tiszta állapotok $R^{\mu\nu}$ együtthatóit!) Akkor most már látjuk, hogy mi lesz a Pauli-diagonális állapotok geometriája?