---

16. feladat – Klasszikus csatornák

Az állapottér $\Delta = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{p} \geq 0, \sum_i p_i = 1\}$, az $A : \Delta \to \Delta'$ állapotterek közti (pozitív és összegtartó) lineáris leképezéseket sztochasztikus leképezéseknek nevezzük (Markov leképezések, vagy klasszikus csatornák), és ha még az egyenletes eloszlás fixpontjuk, akkor bisztochasztikusnak. Ezek sztochasztikus mátrixokkal reprezentálhatóak, melyek valós elemű $d' \times d$-s A mátrixok, melyekre $A_{ij} \geq 0$ („pozitivitás") és $\sum_{i=1}^{d'} A_{ij} = 1$ („összeg-tartás"), és ha még bisztochasztikusak is, akkor $\sum_{j=1}^{d} A_{ij} = 1$ („egység-őrzés").
- Zárt rendszer időfejlődése determinisztikus, ami azt jelenti, hogy tiszta állapothoz tisztát rendel. Hogyan fognak kinézni az ezt leíró sztochasztikus mátrixok? Bisztochasztikusak lesznek?
- A rendszerhez hozzátehetünk egy $\mathbf{q} \in \Delta_Y$ állapottal leírt, tőle korrelálatlan segédrendszert (ancillának is hívják), vagyis $A : \Delta_X \to \Delta_{XY}$, hogy $A\mathbf{p} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}$. Adjuk meg az A sztochasztikus mátrixot! Bisztochasztikus lesz?
- Egy összetett rendszer egy részrendszerét eldobhatjuk, vagyis $A : \Delta_{XY} \to \Delta_X$, elemi tenzorokon megadva $A(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) = \mathbf{p}$. Adjuk meg az A sztochasztikus mátrixot! Bisztochasztikus lesz?
- Egy $\mathbf{p}$ állapotú rendszerhez hozzákeverhetünk ugyanilyen, de $\mathbf{q}$ állapotú rendszert, vagyis $A : \Delta \to \Delta$, hogy $A\mathbf{p} = x\mathbf{p} + (1-x)\mathbf{q}$. Adjuk meg az A sztochasztikus mátrixot! Mikor lesz bisztochasztikus?
- Egy rendszert kicserélhetünk egy adott $\mathbf{q}$ állapotú rendszerre, vagyis $A : \Delta \to \Delta$, hogy $A\mathbf{p} = \mathbf{q}$ bármely $\mathbf{p}$-re. Adjuk meg az A sztochasztikus mátrixot! Mikor lesz bisztochasztikus?
(Ha valaki nem tud elég jól bánni az általános formalizmussal, akkor bitekre kiszámolva is beadhatja a feladatot.)

---

17. feladat – Kvantum csatornák

Az állapottér $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \equiv \{\varrho \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{SA}}\, \mathcal{H} \mid \varrho \geq 0, \operatorname{tr}\varrho = 1\}$, a $\Phi : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{H}')$ állapotterek közti (pozitív és trace-tartó) teljesen pozitív lineáris leképezéseket sztochasztikus kvantum leképezéseknek nevezzük (kvantum csatornák), és ha még a fehér zaj ($\frac{1}{d}\mathrm{I}$) fixpontjuk, akkor bisztochasztikusnak. A Kraus reprezentáció tétel azt állítja, hogy bármely kvantum csatorna felírható $\Phi(\varrho) = \sum_{i=1}^{k} K_i \varrho K_i^\dagger$ alakban („teljes pozitivitás"), ahol az úgynevezett Kraus operátorok $K_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, $\sum_{i=1}^{k} K_i^\dagger K_i = \mathrm{I}$ („trace-tartás"), és ha még bisztochasztikus is, akkor $\sum_{i=1}^{k} K_i K_i^\dagger = \mathrm{I}$ („egység-őrzés").
- Zárt rendszer időfejlődése determinisztikus, ami azt jelenti, hogy tiszta állapothoz tisztát rendel. Hogyan fognak kinézni az ezt leíró Kraus operátorok? A csatornák bisztochasztikusak lesznek?
- A rendszerhez hozzátehetünk egy $\mathbf{q} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{\mathrm{Anc}})$ állapottal leírt, tőle korrelálatlan segédrendszert (ancillának is hívják), vagyis $\Phi : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{Anc}})$, hogy $\Phi(\varrho) = \varrho \otimes \varrho_{Anc}$.

Adjuk meg Φ Kraus operátorait! Bisztochasztikus lesz?
- Egy összetett rendszer egy részrendszerét eldobhatjuk, vagyis $\Phi : \mathcal{D}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}') \to \mathcal{D}(\mathcal{H})$, elemi tenzorokon megadva $\Phi(\varrho \otimes \varrho') = \varrho$. (Vagyis $\Phi = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}'}$, a parciális trace.) Adjuk meg Φ Kraus operátorait! Bisztochasztikus lesz?
- Egy ϱ állapotú rendszerhez hozzákeverhetünk ugyanilyen, de σ állapotú rendszert, vagyis $\Phi : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{H})$, hogy $\Phi(\varrho) = x\varrho + (1-x)\sigma$. Adjuk meg Φ Kraus operátorait! Mikor lesz bisztochasztikus?
- Egy rendszert kicserélhetünk egy adott σ állapotú rendszerre, vagyis $\Phi : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{H})$, hogy $\Phi(\varrho) = \sigma$ bármely ϱ-ra. Adjuk meg Φ Kraus operátorait! Mikor lesz bisztochasztikus?
(Ha valaki nem tud elég jól bánni az általános formalizmussal, akkor qubitekre kiszámolva is beadhatja a feladatot. A Kraus operátoros előállítás általában nem egyértelmű, elég egyfélét megadni.)

---

18. feladat – Egy általánosított mérés

Ez egy jó példa az általánosított kvantum mérésre (közvetett mérés). Nem nehéz, csak hosszan írtam le.

Tekintsünk egy összetett kvantumrendszert, mely két részrendszerből áll! Az egyik egy atom, melynek csak két energiaállapotát tekintjük: Hilbert tere $\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}} = \mathrm{Span}\{|\varphi_{\mathrm{Atom},0}\rangle \equiv |\mathrm{A}\rangle, |\varphi_{\mathrm{Atom},1}\rangle \equiv |\mathrm{G}\rangle\}$, ahol a két ortonormált vektor az „alap” és a „gerjesztett” állapotot jelöli. A másik a fotontér egy módusa, amiben vagy nincs foton, vagy egyetlen foton van: Hilbert tere $\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}} = \mathrm{Span}\{|\varphi_{\mathrm{Foton},0}\rangle \equiv |\mathrm{N}\rangle, |\varphi_{\mathrm{Foton},1}\rangle \equiv |\mathrm{V}\rangle\}$, ahol a két ortonormált vektor a „nincs foton” és a „van foton”. (Itt kivételesen azért erőltetem ezeket a betűs jelöléseket az indexelés helyett, hogy látványosabban különváljon, hogy mi melyik Hilbert-téren lesz.)

Adott időtartam alatt az alapállapotban levő atom p valószínűséggel felvehet egy fotont a fotontérből, és ekkor gerjesztett állapotba ugrik, illetve ugyanekkora valószínűséggel gerjesztett állapotban le is adhat fotont, és ekkor alapállapotba esik.

Szeretnénk megtudni, hogy az atom milyen állapotban van. Ezt a $\{P_{\mathrm{A}} = |\mathrm{A}\rangle\langle\mathrm{A}|, P_{\mathrm{G}} = |\mathrm{G}\rangle\langle\mathrm{G}|\} \subset \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ ortogonális projektorokkal megadott Neumann mérés elárulná, de tegyük fel, hogy ezt nem lehet elvégezni. Mérni csak azt tudjuk, hogy kibocsátott-e egy fotont az atom, vagyis csak a $\{P_{\mathrm{N}} = |\mathrm{N}\rangle\langle\mathrm{N}|, P_{\mathrm{V}} = |\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}|\} \subset \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$ ortogonális projektorokkal megadott Neumann mérést tudjuk elvégezni, melynek kimenetei a „nincs foton” és a „van foton”.

A mérés előtt az atom állapotát a $\varrho_{\mathrm{Atom}} \in \mathcal{D}_{\mathrm{Atom}}$ sűrűségoperátor adja meg. Legyen a fotontér „üres” a mérés előtt, ez $\varrho_{\mathrm{Foton}} = |\mathrm{N}\rangle\langle\mathrm{N}| \in \mathcal{D}_{\mathrm{Foton}}$! Legyen az adott ideig tartó kölcsönhatásból származó unitér operátor mátrixa

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a fenti bázisokból képzett szorzat-bázisban: $|\mathrm{A}\rangle \otimes |\mathrm{N}\rangle, |\mathrm{A}\rangle \otimes |\mathrm{V}\rangle, |\mathrm{G}\rangle \otimes |\mathrm{N}\rangle, |\mathrm{G}\rangle \otimes |\mathrm{V}\rangle$. Mit jelentenek U mátrixelemei? Ugye unitér?

Ha megszólal a fotodetektor a kölcsönhatás ideje alatt, az a $P_{\mathrm{V}} = |\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}| \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$ projektornak megfelelő esemény bekövetkezését jelenti, ha nem, az a $P_{\mathrm{N}} = |\mathrm{N}\rangle\langle\mathrm{N}| \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$-ét. Most azt nézzük meg, mi lesz az atom állapota ez után. Ezt a mérést megadhatjuk a következő teljesen pozitív leképezésekkel, melyeket az imént elmondottak alapján hegesztünk össze a „nincs foton” és a „van foton” kimenetelekhez

$$\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = \mathrm{tr}_{\mathrm{Foton}}\Big[(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{N}})U(\varrho_{\mathrm{Atom}}\otimes\varrho_{\mathrm{Foton}})U^\dagger(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{N}})^\dagger\Big],$$
$$\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = \mathrm{tr}_{\mathrm{Foton}}\Big[(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{V}})U(\varrho_{\mathrm{Atom}}\otimes\varrho_{\mathrm{Foton}})U^\dagger(\mathrm{I}\otimes P_{\mathrm{V}})^\dagger\Big].$$

Írjuk fel a $\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}), \Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ operátorok mátrixait! Ugye ezek a Φ_{N}, Φ_{V} leképezések nem növelik a nyomot? Ezekkel a mérés utáni állapotok a két esetben

$$\varrho_{\mathrm{Atom}} \quad\longmapsto\quad \varrho'_{\mathrm{Atom,(N)}} = \frac{1}{q_{(\mathrm{N})}}\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}), \qquad q_{(\mathrm{N})} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}),$$
$$\varrho_{\mathrm{Atom}} \quad\longmapsto\quad \varrho'_{\mathrm{Atom,(V)}} = \frac{1}{q_{(\mathrm{V})}}\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}), \qquad q_{(\mathrm{V})} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}).$$

Írjuk fel ezeket is! Ugye $q_{(\mathrm{N})} + q_{(\mathrm{V})} = 1$? (Ha nem, akkor valamit elrontottunk...) Mire következtethetünk az egyes kimenetelekből („nincs foton”, „van foton”) az atom állapotára („alap”, „gerjesztett”)? Illetve írjuk fel a nem-szelektív mérés eredményét is:

$$\varrho_{\mathrm{Atom}} \quad\longmapsto\quad \varrho'_{\mathrm{Atom}} = q_{(\mathrm{N})}\varrho'_{\mathrm{Atom,(N)}} + q_{(\mathrm{V})}\varrho'_{\mathrm{Atom,(V)}}.$$

Ugye $\mathrm{tr}\,\varrho'_{\mathrm{Atom}} = 1$?

Most határozzuk meg a Kraus operátorokat, vagyis a

$$\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = M_{\mathrm{N}}\varrho_{\mathrm{Atom}}M_{\mathrm{N}}^\dagger,$$
$$\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = M_{\mathrm{V}}\varrho_{\mathrm{Atom}}M_{\mathrm{V}}^\dagger$$

képletekben szereplő M_{N} és $M_{\mathrm{V}} \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ operátorok mátrixait! (Ebben a példában elegendő egyetlen Kraus operátor mindkét kimenethez, nem kell több ilyen hatását j-re felösszegezni, $\sum_j M_{\mathrm{N},j}\varrho_{\mathrm{Atom}}M_{\mathrm{N},j}^\dagger$, ami az órán tekintett teljesen általános eset volt. Aki még nem fáradt, az meggondolhatja, hogy ez azért van, mert 1-rangú projektorok reprezentálták a „nincs foton” és a „van foton” eseményeket $\mathcal{H}_{\mathrm{Foton}}$ téren.) Ugye igaz, hogy $M_{\mathrm{N}}^\dagger M_{\mathrm{N}} \leq \mathrm{I}$ és $M_{\mathrm{V}}^\dagger M_{\mathrm{V}} \leq \mathrm{I}$? (Önadjungált mátrixokra $A \leq B$, ha $0 \leq B - A$.)

A kimeneti valószínűségek a trace ciklikussága miatt

$$q_{(\mathrm{N})} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{N}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = \mathrm{tr}\,M_{\mathrm{N}}^\dagger M_{\mathrm{N}}\varrho_{\mathrm{Atom}}, \qquad E_{\mathrm{N}} := M_{\mathrm{N}}^\dagger M_{\mathrm{N}},$$
$$q_{(\mathrm{V})} = \mathrm{tr}\,\Phi_{\mathrm{V}}(\varrho_{\mathrm{Atom}}) = \mathrm{tr}\,M_{\mathrm{V}}^\dagger M_{\mathrm{V}}\varrho_{\mathrm{Atom}}, \qquad E_{\mathrm{V}} := M_{\mathrm{V}}^\dagger M_{\mathrm{V}},$$

vagyis megkaphatóak a $\{E_{\mathrm{N}}, E_{\mathrm{V}}\} \subset \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ pozitív operátor értékű mérték (POVM) felhasználásával. Írjuk fel ezek mátrixait, illetve ellenőrizzük, hogy $E_{\mathrm{N}} + E_{\mathrm{V}} = \mathrm{I}_{\mathrm{Atom}}$. Mi lesz ezeknek a spektrálfelbontása? Ezek a $\mathcal{H}_{\mathrm{Atom}}$ Hilbert téren hatnak, bennük az Atom állapotára vonatkozó események konvex kombinációja jelenik meg. Gondolkozzunk el a jelentésén: vagyis milyen járulékok jöhetnek az atom állapotaiból a fotonszám mérésbe?