

## 25. feladat – A CHSH egyenlőtlenséghez

Legyen  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  két feles spin összetett rendszere:  $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$ . Feles spin esetén a három ortogonális spin-irányhoz tartozó operátorok  $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$  (gyorsírással  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ ), és az adott  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\mathbf{a}\|^2 = 1$  irányú spin-mérés operátora  $S_{\mathbf{a}} = \sum_i a_i S_i$  (gyorsírással  $S_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\mathbf{S}$ ). Az összetett rendszer két részrendszerén a megfelelő mérhető mennyiségek operátorai  $S_{\mathbf{a}} \otimes I$  és  $I \otimes S_{\mathbf{b}}$ , a spin-korrelációs méréshez tartozó obszervábilis  $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = (S_{\mathbf{a}} \otimes I)(I \otimes S_{\mathbf{b}}) = S_{\mathbf{a}} \otimes S_{\mathbf{b}}$ .

a.) Számítsuk ki az

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \psi | S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} | \psi \rangle$$

várhatóértéket a  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  szinglet-állapotban! (Órán felírtam, most számoljuk ki.)

b.) A Bell-egyenlőtlenség

$$\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{-2} |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2,$$

keressünk legalább egy olyan  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$  mérési irány-készletet, amikre ez sérül!

Hogy ne csak az ismert dolgok legyenek, gyengítsük egy kicsit a lehetőségeinket: tudjuk sérteni az egyenlőtlenséget nem teljesen összefont állapottal is? Erről szól a következő két részfeladat:

c.) Számoljuk ki az  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  várhatóértéket a  $|\psi'(\eta)\rangle = \sqrt{\eta}|01\rangle - \sqrt{1-\eta}|10\rangle$  állapotban! ( $0 \leq \eta \leq 1$ , ez lokális-unitér ekvivalens a szokásos Schmidt alakkal, de ezzel kicsit szebben lehet számolni. Az a lényeg, hogy az  $\eta$  paraméterrel folytonosan változtatjuk az állapot összefontságát, lásd a 27.f feladatban.)

d.) A b.) feladatban talált  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$  mérési beállításokkal milyen intervallumba eshet  $\eta$  ahhoz, hogy a Bell-egyenlőtlenség sérüljön? (Vagyis milyen az a legkevésbé összefont állapot, amivel még sérteni lehet az egyenlőtlenséget?)

e.) Sok plusz pontért: Mutassuk meg, hogy bármely kis (de nem nulla) összefontság esetén lehet találni olyan mérési beállításokat, amivel a Bell-egyenlőtlenség sérthető! (Azért sok plusz pontért, mert nem néztem meg, hogy meg lehet-e így csinálni... Más megközelítésből viszonylag könnyen adódik, remélem, eljutunk odáig következő órán!)

---

## 26. feladat – A teleportáláshoz

Legyen  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  két feles spin összetett rendszerének Hilbert-tere:  $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$ . A Bell-állapotok ezen a Hilbert-téren  $|B_0\rangle, |B_1\rangle, |B_2\rangle, |B_3\rangle$ , lásd a 12. feladatban (HF04.pdf).

Az órán lesz szó a teleportálási protokollról, amiben három qubit vesz részt:  $\mathcal{H}_{123} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ ,  $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = \dim \mathcal{H}_3 = 2$ . A számításánál kihasználjuk az e tér megfelelő elemeire vonatkozó alábbi egyenlőséget:

$$|\chi\rangle \otimes |B_0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 |B_j\rangle \otimes (\sigma_j |\chi\rangle).$$

Számoljuk ki, hogy tényleg így van! (Itt is lehet fát vágni, de elegánsabban érhetünk célt a „Flip” operátorral,  $F \in \text{Lin } \mathcal{H}_{13}$ , aminek hatása  $F|\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle = |\psi_3\rangle \otimes |\psi_1\rangle$ , felírva ennek mártixát, és kifejtve a Pauli mártixok tenzorszorzatainak bázisán.)

## 27. feladat – Konkurencia

Legyen  $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$  sűrűség mártix, és  $\dim \mathcal{H} = d$ . A konkurencia-négyzet a  $q = 2$  paraméterű Tsallis-entrópia normált változata:

$$C^2(\rho) = 2S_2^{\text{Ts}}(\rho) = 2(1 - \text{tr } \rho^2),$$

tehát ez is a sűrűség mártix kevertségét jellemzi.

- Ellenőrizzük, hogy  $C^2(\rho) \leq 2 \frac{d-1}{d}$ , és ezt a maximumot fel is veszi!
- Legyen  $d = 2$  (qubit)! Ekkor  $C^2(\rho)$  arányos lesz a sűrűség mártix egy invariánsával. Hogy fog kinézni? (Ismét lehet fát vágni, de használhatjuk a Cayley-Hamilton tételt is.)
- Szintén qubitre, használjuk a sűrűségmártix Bloch-vektoros felírását:  $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})$ , ahol  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\mathbf{x}\|^2 \leq 1$  a Bloch-vektor a spin iránya. Számítsuk ki  $C^2(\rho)$ -t ekkor!

Legyen  $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  két részrendszer összetett rendszerének Hilbert-tere, és  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{12})$  tiszta állapot a  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{12}$  vektorral megadva. ( $|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^1 \psi^{ij} |ij\rangle$ ) Ennek a tiszta állapotnak az összefonságának mértékét jellemzi az összetett tiszta állapot konkurenciája (írott nagy  $\mathcal{C}$ ), ami a részrendszer kevertségének mértéke annak konkurenciájával:

$$\mathcal{C}(\psi) = C(\pi_1), \quad \text{ahol } \pi_1 = \text{tr}_2 \pi, \quad \pi = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

- Ugye igaz, hogy  $C(\pi_1) = C(\pi_2)$ , ha  $\pi_1$  és  $\pi_2$  egy tiszta állapot két redukáltja?
- Két qubit esetén, felhasználva a b.) feladatban kapott eredményt, könnyen kapunk erre egy formulát a  $\psi^{ij}$  „kifejtési-együtthetőségi mártix” egy invariánsával. Mi lesz ez a formula?
- Ismét két qubitre, legyen  $|\psi(\eta)\rangle = \sqrt{\eta}|00\rangle + \sqrt{1-\eta}|11\rangle$  Schmidt-kanonikus alak. Számoljuk ki a  $\mathcal{C}(\psi(\eta))$  konkurenciáját! Ugyanannyi lesz, mint az előző feladatbeli  $|\psi'(\eta)\rangle$  állapotra? Milyen  $\eta$  paraméterek esetén lesz az állapot szeparálható ( $\mathcal{C} = 0$ ), és mikor lesz maximálisan összefonott ( $\mathcal{C}$  maximális)?