Kvantumösszefonódás házi feladat, 2018. február 12. Határidő: **2018. február 26.**

---

0. feladat – LaTeX-es

Kérem, őszintén írja meg, ha valaki nem használt még LaTeX-et, és akkor az első ismerkedéssel járó munka fejében kaphat egy feladatnyi pontot.
(Az első ismerkedéshez: http://www.math.bme.hu/latex/dl/latex78.pdf.
Ubuntu linux alatt a `texlive` disztribúciót érdemes felrakni.)

---

1. feladat – Kúpos

Egy vektortér zárt a lineáris kombinációra. Ezen belül egy kúp zárt a *nemnegatív* számokkal vett lineáris kombinációra. Mutassuk meg, hogy
1. a nemnegatív szám-ennesek kúpot alkotnak $\mathbb{R}^n$-en belül,
2. a pozitív szemidefinit operátorok kúpot alkotnak egy Hilbert-tér önadjungált operátorainak $\mathbb{R}$-lineáris terén belül.

---

2. feladat – Sűrűségoperátoros

Olyan mennyiségeket tekintünk a félév során, melyek véges sokféle diszkrét értéket vehetnek fel egy mérésben.

Tekintsünk először klasszikusan viselkedő rendszert! *Klasszikus diszkrét valószínűség-sűrűségek (állapotok)* egy Δ szimplex elemeiként reprezentálhatóak,

$$\Delta_{d-1} \equiv \Big\{ \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{C}^d \;\Big|\; \overline{\mathbf{p}} = \mathbf{p}, \mathbf{p} \geq 0, \|\mathbf{p}\|_1 = \sum_i |p_i| = 1 \Big\}.$$

A *tiszta* állapotok a szimplex sarkai: $\boldsymbol{\delta}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\boldsymbol{\delta}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots$, $\boldsymbol{\delta}_m = (0, 0, \dots, 1)$, vagy röviden $(\boldsymbol{\delta}_i)_j = \delta_{ij}$. A *kevert* állapotok a többiek. Minden állapot felírható tiszta állapotok konvex kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy minden kevert állapot tisztákra való dekompozíciója egyértelmű, vagyis ha veszünk egy $\mathbf{q} \in \Delta_{d-1}$ állapotot, és felírjuk $\mathbf{q} = \sum_{j=1}^m p_j \boldsymbol{\delta}_j$ alakban, (ahol $\mathbf{p} \in \Delta_{m-1}$,) akkor a $\mathbf{p}$ súlyok egyértelműek. (Mik lesznek ezek a súlyok?)

…tudom, ez egy kissé tautologikus volt. Nézzük a kvantum esetet! *Diszkrét kvantumrendszer sűrűségoperátorainak (állapotok)* halmaza

$$\mathcal{D} \equiv \Big\{ \varrho \in \operatorname{Lin} \mathcal{H} \;\Big|\; \varrho^\dagger = \varrho, \varrho \geq 0, \|\varrho\|_1 = \operatorname{tr} \varrho = 1 \Big\}.$$

A *tiszta* állapotok a $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ alakúak (ahol $\|\psi\|^2 = 1$). A *kevert* állapotok a többiek. Tehát, a szuperpozíció miatt, már erre a diszkrét véges rendszerre is folytonosan végtelen sok tiszta állapot adódik. Egy sűrűségoperátor véges számú tiszta állapot konvex kombinációjaként felírható, de ez a dekompozíció általában nem lesz egyértelmű, vagyis ha veszünk egy $\varrho \in \mathcal{D}$ állapotot, akkor általában többféleképpen írhatjuk $\varrho = \sum_{j=1}^m p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

alakba (ahol $\mathbf{p} \in \Delta_{m-1}$ és $\|\psi_j\|^2 = 1$). (Mátrixok diadikus felbontása nem egyértelmű.) Mutassunk erre példákat! Írjuk fel legalább kétféle dekompozícióját a következő mátrixokkal megadott sűrűségoperátoroknak:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(Sikerült?)

---

3. feladat – Sűrűségoperátoros

1. Mutassuk meg, hogy $\varrho \in \mathcal{D}$ sűrűségoperátor tiszta pontosan akkor, ha $\operatorname{tr} \varrho^2 = 1$!
2. A tiszta állapotok ugyanakkor egy-rangú projekciók. A kevert állapotok lehetnek projekciók? Miért? (gy. k.: Emlékezzünk vissza, mi a projekció definíciója, elsős linalg anyag, csak órán nem jött elő!)