Kvantumösszefonódás házi feladat, 2018. február 19. Határidő **2016. március 5.**

A Pauli operátorok szokásos mátrixai:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

és bármely $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ számhármas esetén használjuk a $\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} x_i \sigma_i$ jelölést.

4. feladat – spin operátor diagonalizálása

Feles spin esetén a három ortogonális spin-irányhoz tartozó operátorok $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad (\|\hat{\mathbf{v}}\|^2 = 1)$$

irányú spin operátora $\mathbf{vS} = \sum v_i S_i$. Mik lesznek ennek a sajátértékei és a sajátvektorai? (Órán felírtam, de nem számoltam ki, itt most számoljátok ki!)

---

5. feladat – Hadamard transzformáció

Egy qubit állapota megadható a

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}\big)$$

sűrűségoperátorral, ahol a Bloch-vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ a Bloch-gömbben van ($\|\mathbf{r}\| \leq 1$). Az úgynevezett Hadamard-transzformáció a

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2)$$

mátrixszal vett unitér transzformáció. Hogyan tudjuk ezt elképzelni, vagyis mi lesz ennek hatása a Bloch-gömbön:

$$\begin{aligned} \varrho &\longmapsto H\varrho H^\dagger, \\ \mathbf{r} &\longmapsto \mathbf{r}' = ? \end{aligned}$$

---

6. feladat – spin-flip

Egy qubit állapotán hajtsuk végre az úgynevezett spin-flip transzformációt, amely komplex konjugálás, majd unitér transzformáció a σ_2 Pauli-mátrixszal. (Ez együtt egy antiunitér transzformáció, órán talán majd lesz szó az ilyenekről.) Hogyan tudjuk ezt elképzelni, vagyis mi lesz ennek hatása a Bloch-gömbön:

$$
\begin{array}{ccc}
\varrho & \longmapsto & \tilde{\varrho} = \sigma_2 \varrho^* \sigma_2^\dagger, \\
\mathbf{r} & \longmapsto & \mathbf{r}' = ?
\end{array}
$$

(A csillag komplex konjugálást jelent.) Mit is jelent ez, ha a spinre úgy gondolunk, mint valamire, ami forgást jelent (axiálvektor)? Mi történne, ha elhagynánk a komplex konjugálást?