

Kvantumösszefonódás házi feladat, 2018. február 26. Határidő **2016. március 12.** Most csak két feladat lesz, de az első kettőt ér.

A következő feladathoz jól jön a Pauli-mátrixok ismert szorzása:

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbf{I} + i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (1)$$

ami miatt

$$(\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{y}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{x}\mathbf{y})\mathbf{I} + i(\mathbf{x} \times \mathbf{y})\boldsymbol{\sigma},$$

és nem is kell mátrixot szorozni :-)

7. feladat – forgáscsoport

(Ez részben volt matmódszerekből, de jó felidézni, hogy teljesebb legyen a kép.) Legyen $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ ($\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 = 1$) egységvektor, $\gamma \in \mathbb{R}$ szög, és képezzük az

$$U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = e^{-i\frac{\gamma}{2}\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\sigma}} \quad (2)$$

mátrixot.

(a) Ujjgyakorlatként végezzük el az exponencializálást: vagyis kérdés az r skalár és az \mathbf{r} vektor, amikre $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = r\mathbf{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$.

(b) Ha ez megvan, akkor ebből könnyen kiszámolható $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ determinánása. Do it! (Igazából máshogy is lehet, nem csak az (a) eredményéből.)

(c) Mi lesz $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ hatása a Bloch-gömbön:

$$\begin{aligned} \varrho &\longmapsto U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\varrho U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)^\dagger, \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' = R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x}, \quad R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = ? \end{aligned}$$

Egy forgatást kell kapni a Bloch-gömbön, de hogy ez tényleg egy forgatási mátrix, azt a következő részfeladatból és az azt követő megjegyzésből fogjuk megtudni:

(d) Vegyük a következő mátrixokat:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

és jelöljük: $\mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma} = x_1\Sigma_1 + x_2\Sigma_2 + x_3\Sigma_3$. Ennek hatása vektoriális szorzás \mathbf{x} -szel: $(\mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{y} = i(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. Ezekkel legyen

$$R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma) = e^{-i\gamma\hat{\mathbf{u}}\boldsymbol{\Sigma}}. \quad (4)$$

Végezzük el az exponencializálást! Ez az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ mátrix meg kell, hogy egyezzen a (c) feladatban kapott mátrixszal.

Megjegyzés. $\frac{1}{2}\sigma_i$ és Σ_i ugyanannak a Lie-algebrának a 2 és 3 dimenziós ábrázolásai: mindkettőre igaz, hogy

$$[J_j, J_k] = i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} J_l,$$

ami az $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ Lie algebrát adja meg, ennek lesz $\frac{1}{2}\sigma_i$ és Σ_i a $j = \frac{1}{2}$ -es és $j = 1$ -es spinű ábrázolásai. Ekkor az exponenciális leképezéssel (lásd az (2) és (4) egyenletek) $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ és az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ mátrixok a $SU(2)$ Lie csoport $j = \frac{1}{2}$ -es és $j = 1$ -es spinű ábrázolásai. (A 2 dimenziós a „definiáló” ábrázolás.) A $j = 1$ -es spinű ábrázolás megadja az $SO(3)$ -nak (ami a három dimenziós tér forgatásai) is a 3 dimenziós (definiáló) ábrázolását. Az $U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x}\sigma U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)^\dagger = (R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)\mathbf{x})\sigma$ miatt $SU(2)$ kétszeresen fedi $SO(3)$ -at: $\pm U_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ ugyanazt az $R_{\hat{\mathbf{u}}}(\gamma)$ -t adja.

Általánosan igaz, hogy az $SU(d)$ Lie-csoport $d^2 - 1$ (önadjungált, nyomtalan) generátora megadható úgy, hogy szorzásuk a

$$\sigma_j \sigma_k = \frac{2}{d} \delta_{jk} \mathbf{I} + \sum_{l=1}^{d^2-1} (d_{jkl} + i f_{jkl}) \sigma_l \quad (5)$$

szabálynak tegyen eleget, ahol a d_{jkl} és f_{jkl} együtthatók valósak, és d_{jkl} az indexek permutálására teljesen szimmetrikus, f_{jkl} pedig teljesen antiszimmetrikus. (Az $SU(2)$ esetén (1) speciálisan $d_{jkl} = 0$, $f_{jkl} = \epsilon_{jkl}$.)

8. feladat – qutrites

Qutritek esetén $\dim \mathcal{H} = d = 3$, az önadjungált lineáris operátorok valós vektorterében használhatjuk a $\{\mathbf{I}, \sigma_j \mid j = 1, 2, \dots, 8\}$ bázist, ahol \mathbf{I} az identitás mátrixszal, σ_j -k pedig az $SU(3)$ generátoraival, az úgynevezett Gell-Mann mátrixokkal megadott operátorok. Ezek szokásos reprezentációja:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & & \\ \sigma_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ekkor egy qutrit állapota megadható a

$$\varrho = \frac{1}{3} \mathbf{I} + \mathbf{r}\sigma$$

sűrűségoperátorral, ahol $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^8$ az *általánosított Bloch vektor*, csak most – a qubitek esetével ellentétben, – nem tudjuk megadni azt a $C \in \mathbb{R}^8$ kompakt konvex halmazt (vagyis konvex testet), amin belüli \mathbf{r} vektorok ténylegesen állapotot adnak meg, vagyis pozitív szemidefinit önadjungált operátort. (Itt most kicsit más normálást használunk, mint a qubiteknél.) Írjuk fel ϱ mátrixát! Tekintsünk speciális eseteket, vagyis rögzítsünk néhány koordinátát! Milyen lehetséges értékeket vehetnek fel a következő speciális \mathbf{r} vektorokban szereplő paraméterek?

$(0, 0, \dots, r_j, \dots, 0)$ (csak egyetlen együttható nem nulla),

$(0, 0, r_3, 0, 0, 0, 0, r_8)$ (diagonális),

$(r_1, r_2, r_3, 0, 0, 0, 0, 0)$ (na ez vajon mi?),

$(0, 0, r_3, r_4, r_5, 0, 0, \sqrt{3}r_3)$ (és ez?),

$(r_1, 0, 0, r_4, 0, r_6, 0, 0)$ (egy kicsit érdekesebb).

Szorgalmi: a Gell-Mann mátrixok tényleg kielégítik (5) formulát? Ha igen, mik lesznek a d_{jkl} és f_{jkl} együtthatók? Ha nem, mik lesznek általában a szorzásnál leolvasható együtthatók? (Ez is túl sok vesződség papíron, szóval írhattok rá programot.)

9. feladat – Douglas Hofstadter tiszteletére

A 7. feladat kicsit hosszú, úgyhogy kettőt ér. A harmadik feladat most csak pluszpontért van: találjatok ki valamilyen frappáns, fizikailag motivált problémafelvetésből adódó feladatot a mai óra anyagához, és további pluszpontért oldjátok meg! (Március 18, a konvex halmazos témakör.)