Kvantumösszefonódás házi feladat, 2018. március 9. Határidő **2018. március 26.**

---

## 10. feladat – Két klasszikus bit

Legyen $X$ és $Y$ két valószínűségi változó, értékkészletük $(x_0, x_1)$ és $(y_0, y_1)$, együttes eloszlásuk

$$(\mathbf{p}_{X,Y})_{i,j} = p_{X,Y;i,j} = \mathrm{Prob}(\text{„}X\text{-et mérve } x_i\text{-t kapom } \textit{és } Y\text{-t mérve } y_j\text{-t kapom''}),$$

vagyis $\mathbf{p}_{X,Y} = (p_{X,Y;0,0}, p_{X,Y;0,1}, p_{X,Y;1,0}, p_{X,Y;1,1}) \in \Delta_{X,Y} \subset \mathbb{R}^4$. Mik lesznek a marginálisok, vagyis

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}_X)_i &= p_{X;i} = \mathrm{Prob}(\text{„}X\text{-et mérve } x_i\text{-t kapom''}),\\ (\mathbf{p}_Y)_j &= p_{Y;j} = \mathrm{Prob}(\text{„}Y\text{-t mérve } y_j\text{-t kapom''}).\end{aligned}$$

Írjuk fel a $\boldsymbol{\delta}_{X,i}$, $\boldsymbol{\delta}_{Y,j}$ marginális és $\boldsymbol{\delta}_{X,Y;i,j}$ együttes tiszta állapotokat is! Nézzük meg, hogy $\boldsymbol{\delta}_{X,Y;i,j} = \boldsymbol{\delta}_{X,i} \otimes \boldsymbol{\delta}_{Y,j}$! Tiszta állapot marginálisa tiszta? Másrészt adjunk meg egy egyenletet a korrelálatlan állapotokra, vagyis amikor $\mathbf{p}_{X,Y} = \mathbf{p}_X \otimes \mathbf{p}_Y$.

---

## 11. feladat – Parciális trace

Legyen $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, ekkor a parciális trace-ek

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_1 &: \quad \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{12} \longrightarrow \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_2, \qquad \text{illetve}\\ \mathrm{tr}_2 &: \quad \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{12} \longrightarrow \mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_1 \qquad \textit{lineáris} \text{ műveletek,}\end{aligned}$$

melyek egy elemi tenzoron megadva

$$\mathrm{tr}_1(X \otimes Y) = (\mathrm{tr}\,X)Y, \qquad \text{illetve} \qquad \mathrm{tr}_2(X \otimes Y) = X(\mathrm{tr}\,Y),$$

a szokásos trace műveletekkel. (Ez az a $\mathrm{Lin}\,\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ lineáris művelet, ami, megint csak a $|\psi\rangle \otimes \langle\chi| \equiv |\psi\rangle\langle\chi|$ elemi tenzorokon megadva, $\mathrm{tr}\,|\psi\rangle\langle\chi| = \langle\chi|\psi\rangle$). Adjuk meg ennek hatását a mátrixelemeken, vagyis ha

$$M = \sum_{i,j,i',j'=1}^{d_1,d_2,d_1,d_2} M^{i}{}_{i'}{}^{j}{}_{j'} |i\rangle\langle i'| \otimes |j\rangle\langle j'|,$$

akkor mik lesznek

$$\mathrm{tr}_1\,M = (\mathrm{tr}_1\,M)^j{}_{j'} |j\rangle\langle j'| \qquad \text{és} \qquad \mathrm{tr}_2\,M = (\mathrm{tr}_2\,M)^i{}_{i'} |i\rangle\langle i'|\text{-beli}$$

$(\mathrm{tr}_1\,M)^j{}_{j'}$ és $(\mathrm{tr}_2\,M)^i{}_{i'}$ mátrixelemek? (Itt a $|i\rangle := |\varphi_i\rangle$ gyorsírást használjuk egy rögzített ortonormált bázis elemeire.)

A Pauli operátorok szokásos mátrixai:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

## 12. feladat – Két qubit operátorok, sűrűségmátrixok

Tekintsük két qubit rendszerét, $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$. A $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ lineáris operátorait szokásosan felírhatjuk a Pauli mátrixokat használva bázisként: $\{\sigma_0 \equiv \mathrm{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, ebből adódott a Bloch-vektoros felírás egy qubit állapotaira. A $\mathcal{H}_{12}$ lineáris operátorainak terén ekkor bázist alkotnak a Pauli mártixokból képzett elemi tenzorok $\{\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu \mid \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$. Egy két-qubit állapot ekkor felírható a következő alakban:

$$\varrho = \sum_{iji'j'=0}^{1} \varrho^{i}{}_{i'}{}^{j}{}_{j'} |i\rangle\langle i'| \otimes |j\rangle\langle j'| = \sum_{\mu\nu=0}^{3} R^{\mu\nu} \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{I}\otimes\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathrm{I} + \mathrm{I}\otimes\mathbf{y}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}\Big],$$

ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, és a gyorsírás $\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} x^i \sigma_i$, $\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma} = \sum_{ij=1}^{3} z^{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$. Gondolhatunk rá úgy is, mint

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{y} \\ \hline \mathbf{x} & \mathbf{z} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4.$$

Adjuk meg a redukált sűrűségmátrixokat mindhárom iménti alakra! Hogy néznek ki az $R$ együtthatók korrelálatlan ($\varrho = \varrho_1 \otimes \varrho_2$) állapotra?

Sajnos most az $R$ (vagy $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) együtthatókkal nem tudjuk általánosan megfogalmazni, hogy milyen értékekre lesz $\varrho \geq 0$. (Egy qubitnél ezt egyszerűen a Bloch-vektor hosszával meg lehetett adni.) Viszont tekinthetünk speciális eseteket. Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{z}$ diagonális! Hívjuk ezt *Pauli-diagonális* állapotnak! Írjuk fel ekkor $\varrho$ mátrixát, számoljuk ki a sajátértékeit, és adjuk meg, hogy milyen $\mathbf{z}$ értékekre lesz pozitív szemidefinit, (látunk itt valami geometriát a paraméterek $(z^{11}, z^{22}, z^{33}) \in \mathbb{R}^3$ vektorára?) valamint milyen $\mathbf{z}$ értékekre lesz tiszta állapot!

A Bell-állapotok a két-qubit Hilbert-téren

$$|\mathrm{B}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big), \qquad |\mathrm{B}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big),$$
$$|\mathrm{B}_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big), \qquad |\mathrm{B}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big).$$

Ezt *Mágikus bázisnak* is szokták hívni. Ellenőrizzük le, hogy tényleg bázis, vagyis, hogy ezek teljes ortonormált rendszert alkotnak $\mathcal{H}_{12}$-ben! (Válalkozó szelleműeknek: Ellehőrizzük le azt is, hogy tényleg mágikus!) Másrészt ezek lokális unitér ekvivalensek egymással, ehhez gyakorlásként mutassuk meg, hogy $|\mathrm{B}_\mu\rangle = \sigma_\mu \otimes \mathrm{I}|\mathrm{B}_0\rangle$ (írjuk ki a $|\mathrm{B}_\mu\rangle$ vektorokat és $\sigma_\mu \otimes \mathrm{I}$ mátrixokat)! Vegyünk egy olyan sűrűség mátrixot, amely ezek keveréke: $\varrho = \sum_{\mu=0}^{3} p_\mu |\mathrm{B}_\mu\rangle\langle\mathrm{B}_\mu|$, ahol $p_\mu \geq 0$, $\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu = 1$. Ezt *Bell-diagonális állapotnak* hívjuk, és a $\mathbf{p} \in \Delta_3 \subset \mathbb{R}^4$ súlytól függ, ami a 3-dimenziós szimplexben van. Ez konstrukcióból adódóan pozitív szemidefinit. Mik lesznek ennek az $R^{\mu\nu}$ kifejtési együtthatói? (Ehhez számoljuk ki a $\pi_\mu = |\mathrm{B}_\mu\rangle\langle\mathrm{B}_\mu|$ tiszta állapotok $R^{\mu\nu}$ együtthatóit!) Akkor most már látjuk, hogy mi lesz a Pauli-diagonális állapotok geometriája?