13. feladat – Redukált állapot

Az összetett rendszer Hilbert tere a részrendszerek Hilbert tereivel $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Ha az összetett rendszer állapota $\varrho_{12} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{12})$, hogyan kaphatjuk meg a részrendszer $\varrho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$ úgynevezett *redukált*, vagy *marginális állapotát*? Először mutassuk meg, hogy az 1-es részrendszeren $X_1 \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{SA}}\,\mathcal{H}_1$ önadjungált operátorral jellemzett mennyiséget az összetett rendszeren a $X_{12} = X_1 \otimes \mathrm{I}_2 \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{SA}}\,\mathcal{H}_{12}$ operátorral kell megadni, ahol $\mathrm{I}_2 \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{SA}}\,\mathcal{H}_2$ az identitás operátor! Ez után a részrendszer $\varrho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$ állapotára teljesülnie kell, hogy akár a részrendszert tekintve, akár az egészet, a megfelelő állapotot használva ugyanazt a várható értéket kapjuk:

$$\forall X_1 \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{SA}}\,\mathcal{H}_1 : \qquad \mathrm{tr}\,\varrho_1 X_1 = \mathrm{tr}\,\varrho_{12} X_{12}.$$

Mutassuk meg, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha ϱ_1-et a parciális trace-szel származtatjuk az eredeti ϱ_{12} állapotból, tehát $\varrho_1 = \mathrm{tr}_2\,\varrho_{12}$. (A parciális trace definíciója órán hangzott el, de megtalálható a 11. feladatban is a `HF04.pdf`-ben.)

---

14. feladat – 2-qubit kanonikus alak

Legyen $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, és a bázis a szokásos gyorsírással $|\varphi_{1,i}\rangle \otimes |\varphi_{2,j}\rangle \equiv |\varphi_{12,ij}\rangle =: |ij\rangle$, és legyen mindkét Hilbert-tér két dimenziós, tehát általában $|\psi\rangle = \psi^{00}|00\rangle + \psi^{01}|01\rangle + \psi^{10}|10\rangle + \psi^{11}|11\rangle$. Legyen most

$$|\psi\rangle = \cos(\alpha)|00\rangle + \sin(\alpha)|11\rangle, \qquad 0 \le \alpha \le \pi/2.$$

(Az α-t Schmidt szögnek is hívják.)
- Mik lesznek a Schmidt-együtthatók?
- Írjuk fel a $\pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotú sűrűségmátrixot a fenti bázisban,
- valamint a részrendszerek állapotait (redukált sűrűségmátrixok): $\pi_1 = \mathrm{tr}_2\,\varrho$, $\pi_2 = \mathrm{tr}_1\,\varrho$.
- Mi lesz a spektrumuk? Milyen paraméterértékekre lesznek tiszták/kevertek? (Ekkor mi az eredeti állapot?)

Legyen most

$$|\psi\rangle = x|00\rangle + x|01\rangle + y|10\rangle - y|11\rangle.$$

Milyen értékeket vehetnek fel a $x, y \in \mathbb{C}$ együtthatók, és mi lesz a válasz a fenti kérdésekre ennél az állapotnál?

---

15. feladat – Tiszta kiterjesztés

Legyen $\mathcal{H}$ két dimenziós, és $\varrho = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ qubit állapot a szokásos Bloch-vektoros felírással (HF02.pdf). Tegyünk hozzá egy másik rendszert (valamilyen alkalmas $\mathcal{H}'$ Hilbert teret használva) és írjuk fel az összetett rendszer egy olyan $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ állapotvektorát, melyből a részrendszer állapota éppen ϱ, vagyis $\varrho = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}'} |\psi\rangle\langle\psi|$. (Ezt a $|\psi\rangle$ állapotvektort, vagy a belőle képzett $\pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotot az eredeti ϱ állapot *tiszta kiterjesztésének* hívjuk.[1])

Most írjuk fel az összes ilyen $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ állapotvektort $\dim \mathcal{H}' = 2$ esetére. Ezt úgy lehet megtenni, hogy az előző részben kapott $|\psi\rangle$-re hattatjuk az $\mathrm{I} \otimes U$-t, ahol $U \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ unitér. (Tipp: paraméterezzük az unitér mátrixot a következő módon:

$$U = \mathrm{e}^{i\phi/2} \begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2), \qquad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad \text{és} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Aki ezt nem tudta, az járjon utána.) Ez a módszer tényleg megadja az összes ilyen $|\psi\rangle$ vektort? Lesz olyan, hogy két különböző $U \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ ugyanarra a vektorra vezet? Írjuk fel gyakorlásképpen az így elcsavart $|\psi\rangle$-kkel a $|\psi\rangle\langle\psi|$ tiszta állapotot, majd ellenőrizzük, hogy $\varrho = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}'} |\psi\rangle\langle\psi|$.

[1] Vannak, akik a „purifikáció” nevet használják, az angol purification alapján, ami magyarul borzalmasan cseng. A magyar „tiszta kiterjesztés” használatát Vrana Péter javasolta nemrég.