22. feladat – Majorálás klasszikus állapotokon

Legyenek $\mathbf{p} = (p_1, \dots p_d), \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d) \in \Delta$ d elemű diszkrét valószínűségeloszlások. Ekkor $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ ($\mathbf{p}$-t majorálja $\mathbf{q}$) definíció szerint ha

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} q_i^{\downarrow}, \qquad \text{minden } 1 \leq k \leq d\text{-re.}$$

($\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}^{\downarrow}$ a csökkenő sorrendbe rendezést jelenti.) Lássuk be, hogy ez permutáció erejéig részben-rendezés, vagyis:
(i) $\mathbf{p} \preceq \mathbf{p}$,
(ii) $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \preceq \mathbf{r}$ akkor $\mathbf{p} \preceq \mathbf{r}$,
(iii) $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \preceq \mathbf{p}$ akkor $\mathbf{p}^{\downarrow} = \mathbf{q}^{\downarrow}$,
valamint néhány más tulajdonságot:
(iv) bármely $\mathbf{p}$ eloszlásra $(\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}) \preceq \mathbf{p} \preceq (1, 0, \dots, 0)$,
(v) adott $\mathbf{q}$ eloszlás által majorált eloszlások konvex halmazt alkotnak, vagyis $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \preceq \mathbf{q}$ akkor $0 \leq a \leq 1$-re $(a\mathbf{p}_1 + (1-a)\mathbf{p}_2) \preceq \mathbf{q}$,
(vi) minden $\mathbf{p}$, amit majorál egy $\mathbf{q}$, benne van $\mathbf{q}$ elemeinek összes permutációjaként előálló eloszlások konvex burkában.
(vii) Adjunk meg olyan $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta$ elemeket, melyekre $\mathbf{p} \not\preceq \mathbf{q}$ és $\mathbf{q} \not\preceq \mathbf{p}$. Mi az a minimális d, amire ilyen párokat találhatunk?

---

23. feladat – Klasszikus entrópiák

A Shannon, a Tsallis és a Rényi entrópiák:

$$S(\mathbf{p}) = -\sum_i p_i \ln p_i,$$
$$S_q^{\mathrm{Ts}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q}\Big[\sum_i p_i^q - 1\Big], \qquad 0 < q,$$
$$S_q^{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_i p_i^q, \qquad 0 < q.$$

(i) Lássuk be, hogy $q \to 1$ esetén mind a Tsallis, mind a Rényi entrópia a Shannon entrópiához tart:

$$\lim_{q\to 1} S_q^{\mathrm{Ts}}(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}), \qquad \text{és} \qquad \lim_{q\to 1} S_q^{\mathrm{R}}(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}).$$

(ii) Azért hívjuk ezeket entrópiáknak, mert Schur-konkávok (tehát a kevertségről mondanak valamit), ekkor bisztochasztikus leképezések Markov-láncában folyamatosan nemcsökkennek. (f Schur-konkáv, ha $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$ esetén $f(\mathbf{p}) \geq f(\mathbf{q})$.) Lássuk be, hogy a Shannon,

a Tsallis és a Rényi entrópiák mind Schur-konkávok. (Hint: használjuk az órán tanult tételt a Schur-konvexitásra.)
(iii) Az a tulajdonság, ami a Shannon entrópiát kiválasztja, a rekurzivitás. Lássuk be az egyszerű alakját: $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ eloszlás a $(p_1, p_2, \dots, ap_d, (1-a)p_d)$ eloszlás durvítása, (mint mindig, $0 \leq a \leq 1$,) ekkor a finomabb eloszlás entrópiája nő a durvábbéhoz képest:

$$S\big((p_1, p_2, \dots, ap_d, (1-a)p_d)\big) = S\big((p_1, p_2, \dots, p_d)\big) + p_d S\big((a, 1-a)\big).$$

(Az órán felírt alak ennek következménye, és azért jobb, mert a kvantumos, tenzorszorzatos struktúra jobban látszik majd benne. Viszont ahhoz nagyon sokat kellene írni. . .)

---

24. feladat – Klasszikus relatív enrópia

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta$ *relatív entrópiá*ja, vagy *Kullback-Leibler divergenciá*ja:

$$S(\mathbf{p}||\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{d} p_i(\ln p_i - \ln q_i) \qquad \text{ha } p_i = 0 \text{ esetén } q_i = 0, \text{ különben } \infty.$$

(i) Lássuk be, hogy $S(\mathbf{p}||\mathbf{q}) \geq 0$, és $S(\mathbf{p}||\mathbf{q}) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.
(ii) Tekintsünk egy kísérletet 2 kimenetellel, melyek valószínűségeit a $\mathbf{q} = (q, 1-q)$ adja meg! Először írjuk fel annak a valószínűségét, hogy a kísérletet k-szor elvégezve a kimenetelek aránya másik, $\mathbf{p} = (p, 1-p)$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ valószínűségekre vezet! Nagy k-ra közelítsük ennek logaritmusát a Stirling formula felhasználásával: $\ln k! \approx k \ln k - k$. Mit találunk ekkor a kérdéses valószínűség exponensében?
(iii) Mutassuk meg, hogy a relatív entrópia a két argumentumában *együtt-konvex*, (nem biztos, hogy ezt így fordítják, *jointly convex* angolul,) vagyis

$$S\big(a\mathbf{p}_1 + (1-a)\mathbf{p}_2 \big\| a\mathbf{q}_1 + (1-a)\mathbf{q}_2\big) \leq aS(\mathbf{p}_1||\mathbf{q}_1) + (1-a)S(\mathbf{p}_2||\mathbf{q}_2), \qquad 0 \leq a \leq 1.$$