25. feladat – Kvantum állapotok dekompozíciói

Órán volt: Ha $\dim \mathcal{H} = d$, és egy sűrűségmátrix spektrálfelbontása

$$\varrho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \qquad \text{ahol} \qquad \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1,\ \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta^i_j,$$

akkor bármely tetszőleges m elemű ($m \geq d$) konvex dekompozíció

$$\varrho = \sum_{j=1}^{m} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \qquad \text{ahol} \qquad p_j \geq 0,\ \sum p_j = 1,\ \|\psi_j\|^2 = 1,$$

kifejthető a $\sqrt{\lambda_i}|\varphi_i\rangle$ vektorokkal az $U^j{}_i$ kifejtési együttható-mátrixszal ($m \times d$-s), melynek oszlopai ortonormáltak ($U^\dagger U = \mathrm{I}_d$, izometria) a következőképpen:

$$\sqrt{p_j}|\psi_j\rangle = \sum_{i=1}^{d} U^j{}_i \sqrt{\lambda_i}|\varphi_i\rangle.$$

Ez volt a Schrödinger's Mixture Theorem.
- Órán láttuk, hogy hogyan írhatók fel az általános dekompozíció p_j keverési súlyai a spektrummal és az $U^j{}_i$ paraméterekkel. Hogyan is?
- Órán láttuk azt is, hogy ebből könnyen következett a HLP-lemma miatt, hogy $\mathbf{p} \preceq \boldsymbol{\lambda}$, vagyis minden dekompozíció $\mathbf{p}$ keverési súlyait majorálják a spektrális felbontás $\boldsymbol{\lambda}$ keverési súlyai, amik a sajátértékek. Miért is?
- Ezek szerint pedig $S(\mathbf{p}) \geq S(\boldsymbol{\lambda})$, vagyis a lehetséges dekompozíciók súlyainak entrópiája (ezt az *adott dekompozícióra vonatkozó keverési entrópiának* is nevezik) a spektrális dekompozícióra a legkisebb. Miért is? Bármilyen entrópiára, ugye?
- Mutassuk meg egy qubit példáján, hogy ha az állapot nem tiszta, akkor a lehetséges dekompozíciók keverési entrópiája felülről nem korlátos! Tipp: Gondoljunk a $\frac{1}{2}\mathrm{I}$ teljesen kevert állapotra, mely a Bloch gömb közepe! Ennek egy m elemű dekompozíciója egy tetszőleges főkörön egymást $2\pi/m$ szögre követő m tiszta állapot egyenletes $1/m$ súlyokkal. Általánosítsuk a gondolatmenetet tetszőleges

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}\big), \qquad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \qquad \|\mathbf{r}\| < 1$$

kevert állapotra. Adjuk meg expliciten egy m elemszámú dekompozíciót, írjuk fel a keverési entrópiát (ha ez m-met növelve a végtelenbe tart, akkor jól okoskodtunk), és gyakorlásképpen adjuk meg az $U^j{}_i$ együtthatókat is!

26. feladat – Majorálás kvantumállapotokon

Klasszikus esetben igaz volt, hogy egy állapot által majorált állapotok egy konvex halmazban vannak, amit az állapot összes permutáltjának konvex burkaként kapunk, vagyis $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Delta$,

$$\mathbf{p} \preceq \mathbf{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a_i \geq 0,\ \sum_i a_i = 1 \quad \text{hogy} \quad \mathbf{p} = \sum_i a_i S_i \mathbf{q},$$

ahol S_i-k permutációs mátrixok, tehát elegendő, ha i maximum $d!$-ig megy, ahol d az eloszlások hossza. (Igazából a Carathéodory tétel miatt d is elég lenne…) Bizonyítsuk be az állítás kvantumos megfelelőjét (Uhlmann majorálási tétel): $\varrho, \sigma \in \mathcal{D}$,

$$\varrho \preceq \sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a_i \geq 0,\ \sum_i a_i = 1 \quad \text{hogy} \quad \varrho = \sum_i a_i U_i \sigma U_i^\dagger,$$

ahol $U_i \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ unitér operátorok, és – noha végtelen sok unitér mátrix van, de – elegendő, ha i maximum $d!$-ig megy, ahol $d = \dim \mathcal{H}$. (A majorálás kvantumállapotokon a klasszikus állapotokon értelmezettel definiált: $\varrho \preceq \sigma$ definíció szerint ha $\operatorname{Spect}\varrho \preceq \operatorname{Spect}\sigma$. A klasszikus állapotokon pedig lásd a 22. feladatban (`HF08.pdf`).)

Legyen $\dim \mathcal{H} = 2$ (qubit), rajta $\varrho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokkal, melyek Bloch-vektoros felírása:

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}\big), \quad \sigma = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma}\big), \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{r}\|, \|\mathbf{s}\| \leq 1.$$

Mit jelent az $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ Bloch-vektorok nyelvén, hogy $\varrho \preceq \sigma$? Hogyan tudjuk szemléltetni a fenti tételt ekkor?

---

27. feladat – Kvantum relatív entrópia

A kvantum relatív entrópia: $\varrho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokra

$$S(\varrho\|\sigma) = \operatorname{tr} \varrho(\ln \varrho - \ln \sigma) \qquad \text{ha } \operatorname{Supp}\varrho \subseteq \operatorname{Supp}\sigma, \text{ különben } \infty.$$

Bizonyítsuk be, hogy ez nemnegatív, és 0 akkor és csak akkor, ha $\varrho = \sigma$.

Ehhez bizonyítsunk egy erősebb állítást:

$$S(\varrho\|\sigma) \geq \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma - \varrho)^2.$$

(Hint: Ehhez igazoljuk, majd használjuk fel a következő, $\eta(x) = -x \ln x$ függvényre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$-\eta(x) + \eta(y) + (x - y)\eta'(y) \geq \frac{1}{2}(x - y)^2,$$

ahol a $'$ deriválást jelent. Ezt követően használjuk fel a mátrixkalkulusbeli eredményt, hogy ha c_k valós számokra, f_k, g_k valós függvényekre $\sum_k c_k f_k(x) g_k(y) \geq 0$, akkor ha x

és y helyére A és B önadjungált mátrixokat írunk, akkor igaz a összefüggés a nyomra: $\sum_k c_k \operatorname{tr}\big(f_k(A) g_k(B)\big) \geq 0.$)

Legyen $\dim \mathcal{H} = 2$ (qubit), rajta $\varrho, \sigma \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ állapotokkal, melyek Bloch-vektoros felírása:

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}\big), \quad \sigma = \frac{1}{2}\big(\mathrm{I} + \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma}\big), \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{r}\|, \|\mathbf{s}\| \leq 1.$$

Adjunk meg valamilyen nem túl szörnyen kinéző formulát ezek kvantum relatív entrópiájára! (Ez az unitér invariancia miatt felírható csupán a két Bloch-vektor hosszával és közbezárt szögükkel. Az viszont általában nem igaz, hogy a kvantum relatív entrópia a spektrumok klasszikus relatív entrópiája lesz. Van olyan eset, amikor mégis?)